POLITECNICO DI MILANO

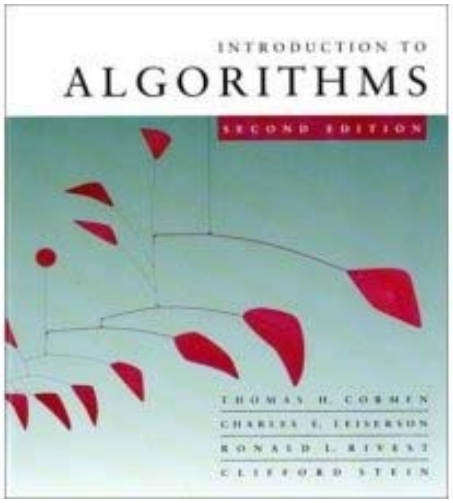
Algoritmi e Strutture Dati

Algoritmi greedy

Daniele Loiacono

Riferimenti

- T.H. Cormen, C.E. Leiserson, R.L. Rivest, C. Stein Introduction to Algorithms, Second Edition



- Queste trasparenze sono disponibili su http://dei.polimi.it/upload/loiacono

-

Introduzione

- Gli algoritmi greedy risolvono problemi di ottimizzazione che comportano una sequenza di decisioni
- Come funzionano?
  - Ad ogni passo prendono la decisione che sembra ottima (ovvero, è localmente ottima)
  - Applicano il medesimo principio al sottoproblema rimanente (cioè quello che si ottiene dopo aver preso la decisione localmente ottima)
  - Sperabilmente, trovano un ottimo globale
- Quando possiamo applicarli?
  - Quando è possibile dimostrare che esiste una scelta ingorda: cioè fra tutte le scelte ne esiste una che può essere facilmente individuata e porta sicuramente alla soluzione ottima"
  - Quando il problema ha sottostruttura ottima: dopo aver preso una decisione, si ottengono uno o più sottoproblemi con al stessa struttura di quello originale
- In alcuni casi, anche soluzioni non ottime possono essere comunque interessanti

Problema della selezione di attività

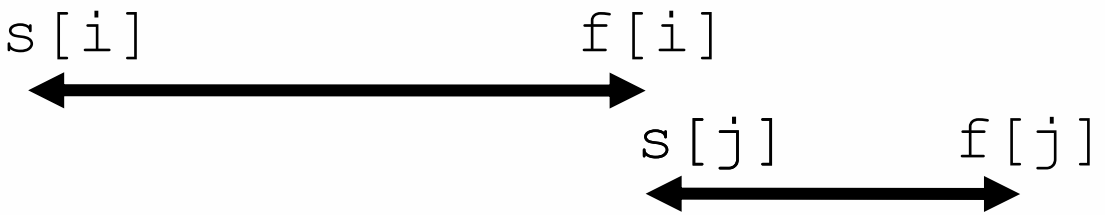
Problema della selezione di attività

- Problema:
  - Siano date n attività in competizione tra loro per l'utilizzo di una certa risorsa
  - Trovare l'allocazione ottimale della risorsa, cioè il più grande sottoinsieme di attività che possono condividere la risorsa senza creare conflitti
- Definizioni:
  - S={ 1,2,…,n } un insieme di attività
  - Ad ogni attività i in S sono associati:
    - s[i] → tempo di inizio
    - f[i] → tempo di fine
    - S[i] e f[i] sono interi non negativi

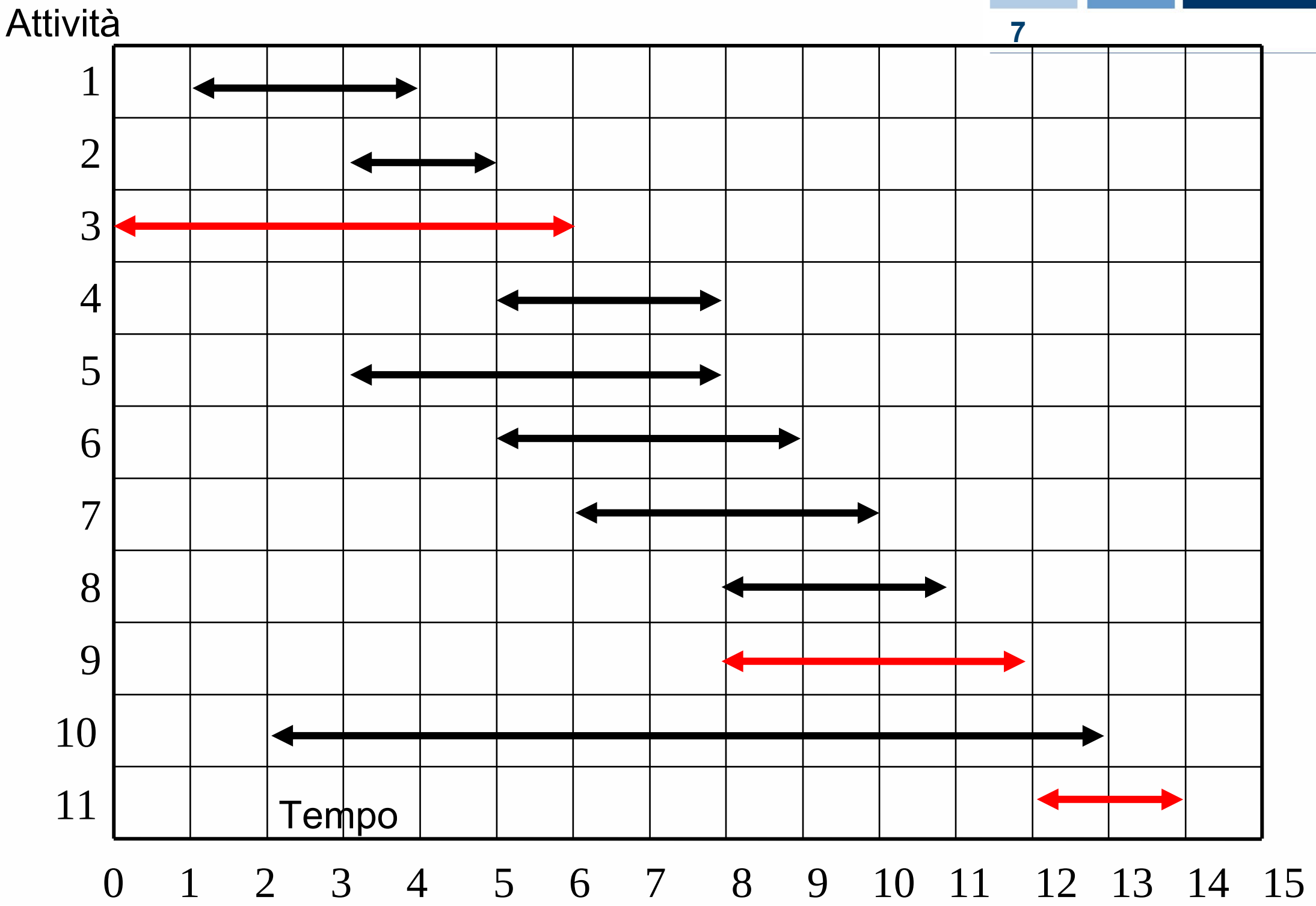
i	s[i]	f[i]
1	1	4
2	3	5
3	0	6
4	5	7
5	3	8
6	5	9
7	6	10
8	8	11
9	8	12
10	12	14

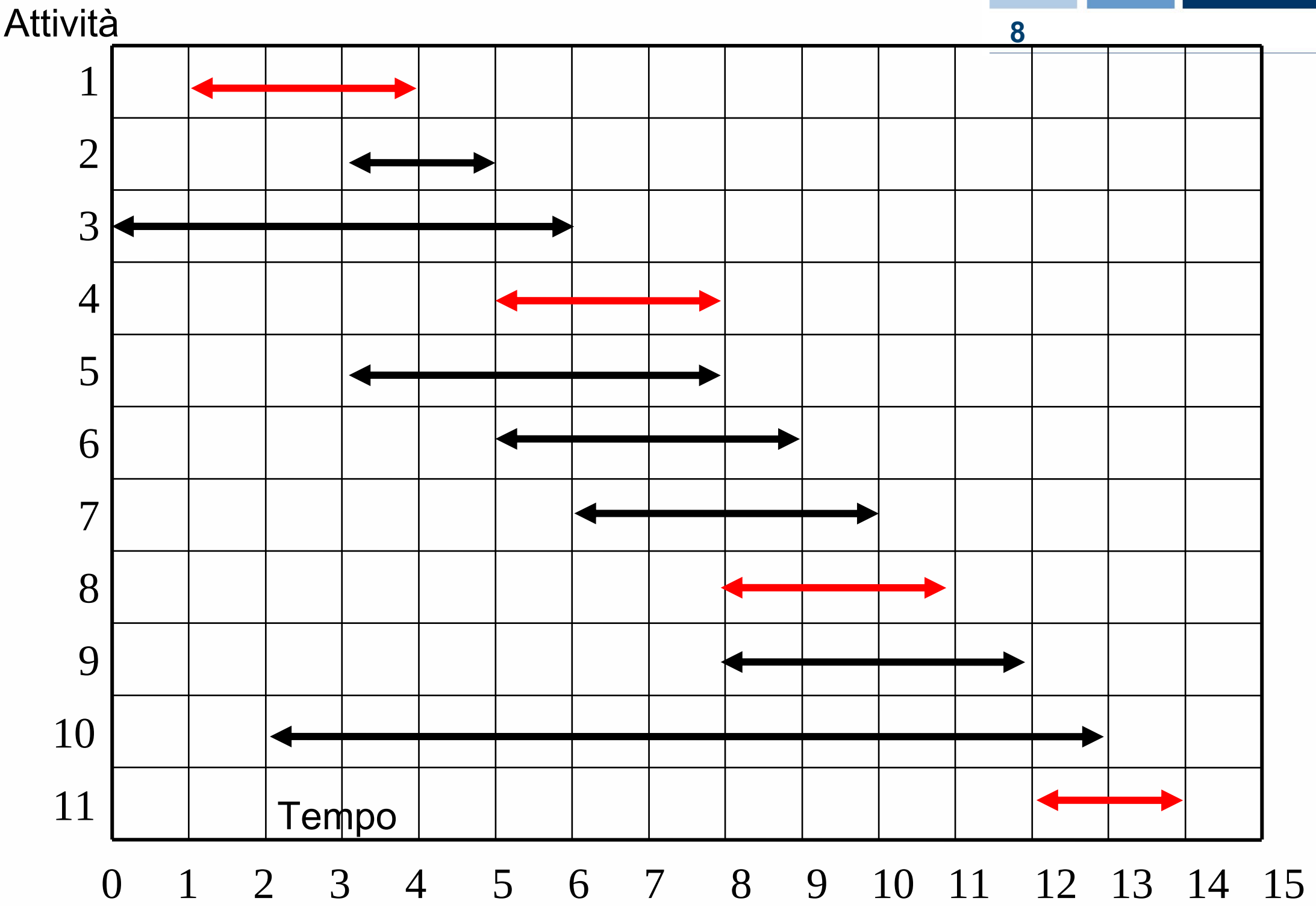
Definizione formale del problema

- Due attività *i* e *j* si dicono *compatibili* se gli intervalli `[s[i],f[i]]` e `[s[j],f[j]]` sono *disgiunti*, cioè non si sovrappongono
  - `f[j]` ≤ `s[i]` oppure `f[i]` ≤ `s[j]`



- Problema della selezione delle attività
  - Dato l'insieme di attività $S=\{ 1,2,\ldots,n \}$, trovare il più grande sottoinsieme $A \subseteq S$ tale che tutte le attività in esso contenute sono compatibili due a due
- Soluzione "brute-force": $\Theta(2^n)$

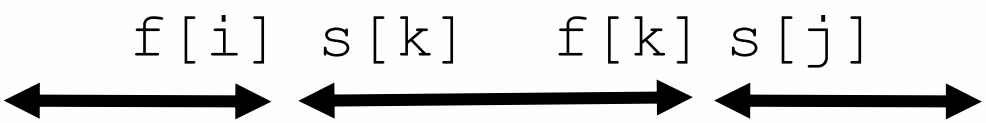

Attività
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
Tempo
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15


Attività
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
Tempo
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15

Sottostruttura ottima: definizioni

- Si assuma che le attività siano ordinate per tempo di fine:
  - `f[1] ≤ f[2] ≤ … ≤ f[n]`
- Sottoproblema **`S[i,j]`**
- **`S[i,j] = { k | f[i] ≤ s[k] < f[k] ≤ s[j] }`**

  Il sottoinsieme di attività che
  - iniziano dopo che *i* ha finito
  - finiscono prima che *j* abbia iniziato



- Aggiungiamo due attività "fittizie":
  - *0* → *f[0] = 0*
  - *n+1* → *s[n+1] = +∞*
- Così S[0,n+1] corrisponde al problema completo *S*

Sottostruttura ottima: caratterizzazione

- Sia A[i,j] è una soluzione ottimale di S[i,j], e l'attività k sia inclusa in A[i,j]; allora:
- Il problema S[i,j] viene suddiviso in due sottoproblemi:
  - S[i,k]: le attività di S[i,j] che finiscono prima di k
  - S[k,j]: le attività di S[i,j] che iniziano dopo di k

i. A[i,j] contiene le soluzioni ottimali di S[i,k] e S[k,j]
   - $A[i,k] = A[i,j] \cap S[i,k]$ è la soluzione ottimale di S[i,k]
   - $A[k,j] = A[i,j] \cap S[k,j]$ è la soluzione ottimale di S[k,j]

- Dimostrazione (metodo cut-and-paste)
  - Sia A'[i,k] una soluzione ottima di S[i,k] tale che |A[i,k]| < |A'[i,k]|
  - Allora A'[i,j] = A[i,j] – A[i,k] $\cup$ A'[i,k] è tale che |A[i,j]| < |A'[i,j]|
    $\Rightarrow$ Assurdo: A[i,j] è una soluzione ottima

Definizione ricorsiva

- Descrizione ricorsiva della soluzione:
  - A[i,j] = A[i,k] $\cup$ { k } $\cup$ A[k, j]
  - Come determinare k ? Analizzando tutte le possibilità...
- Definizione: c[i, j]
  - La dimensione del più grande sottoinsieme A[i,j] $\subseteq$ S[i,j] di attività mutualmente compatibili
- Come si calcola?

$$c[i,j] = \begin{cases} 0 & \text{se } S[i,j] = \varnothing \\ max_{i<k<j}\{c[i,k] + c[k,j] + 1\} & \text{se } S[i,j] \neq \varnothing \end{cases}$$

Verso una soluzione "greedy"

- La soluzione appena descritta ha complessità $\theta(n^3)$
  - Devo risolvere tutti i sottoproblemi con $i \neq j$, nel caso peggiore ci mettero tempo O(n) per un sottoproblema
- Posso fare di meglio?
  - Riflettiamo meglio sul problema....
  - Siamo sicuri che sia necessario analizzare *tutti* i possibili valori per k?

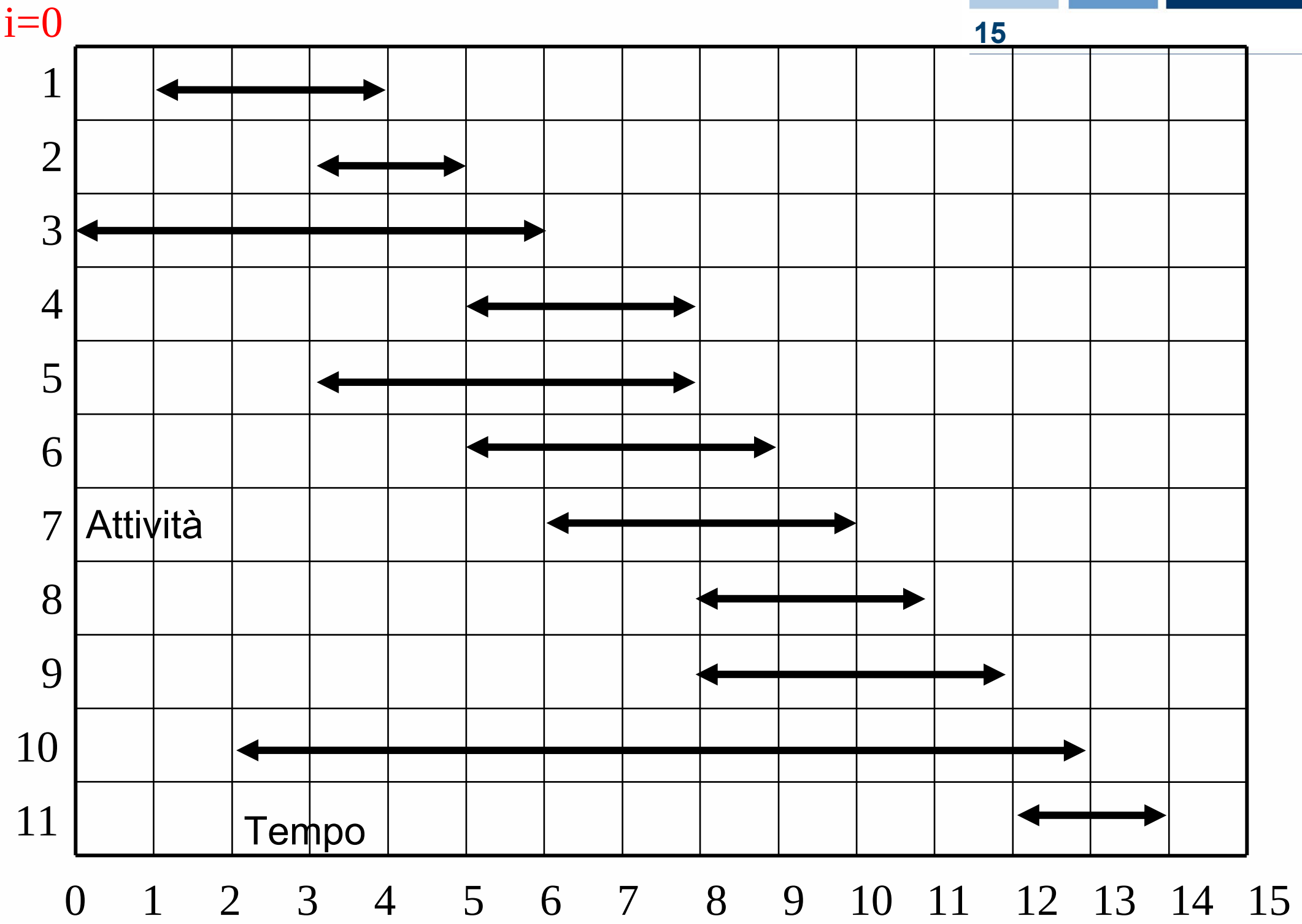
Scelta greedy

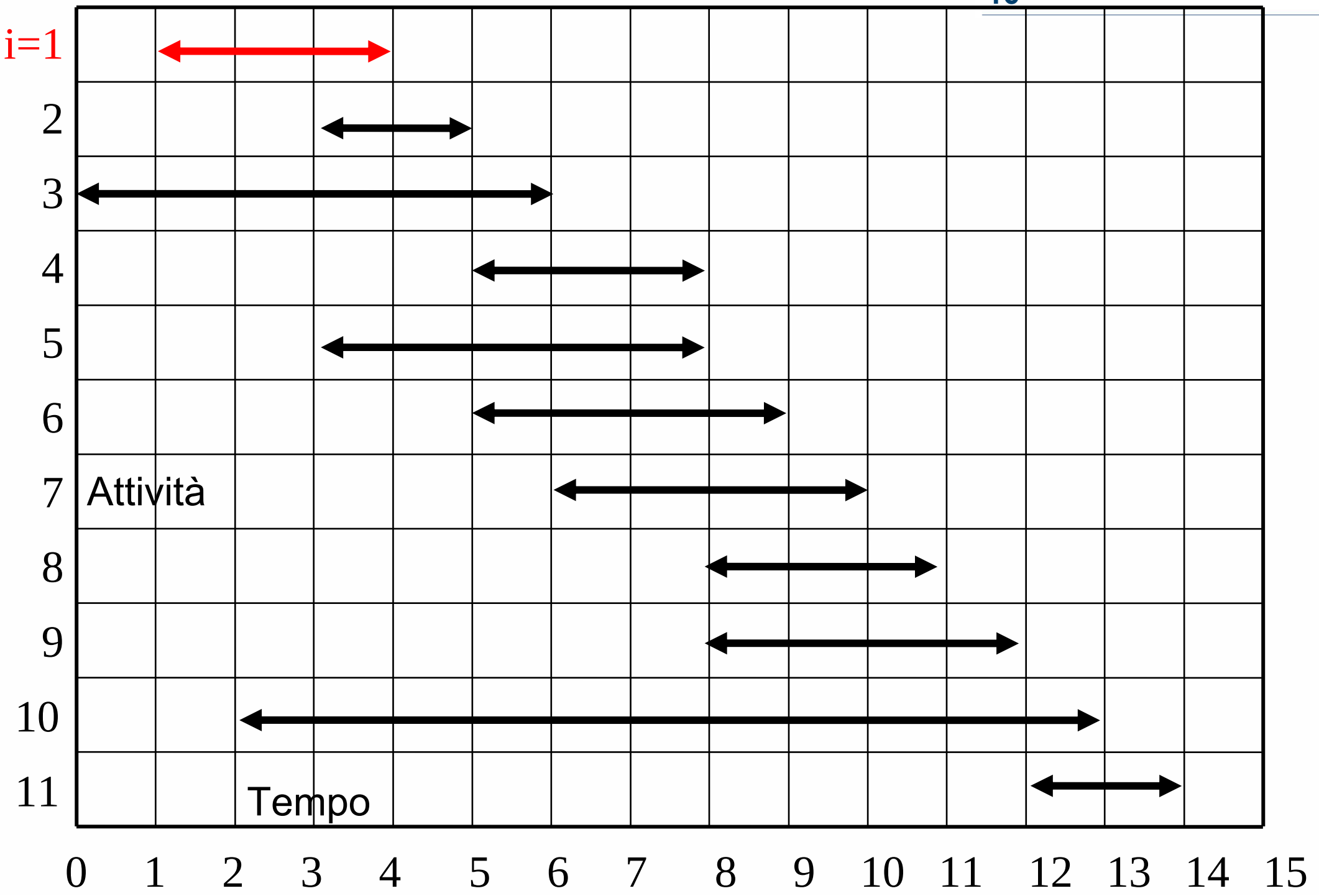
- Sia S[i,j] un sottoproblema non vuoto, e m l'attività di S[i,j] con il minor tempo di fine; allora
  - m è compresa in qualche soluzione ottima di S[i,j]
  - Il sottoproblema S[i,m] è vuoto
- Conseguenze:
  - Non è più necessario analizzare tutti i possibili valori di k
    - Faccio una scelta "ingorda", ma sicura: seleziono l'attività m con il minor tempo di fine
  - Non è più necessario analizzare due sottoproblemi:
    - Elimino tutte le attività che non sono compatibili con la scelta ingorda
    - Mi resta solo un sottoproblema da risolvere: S[m,j]
- **Esercizio: dimostrare con il metodo cut-and-paste che esiste almeno una soluzione ottima che contiene la scelta greedy**

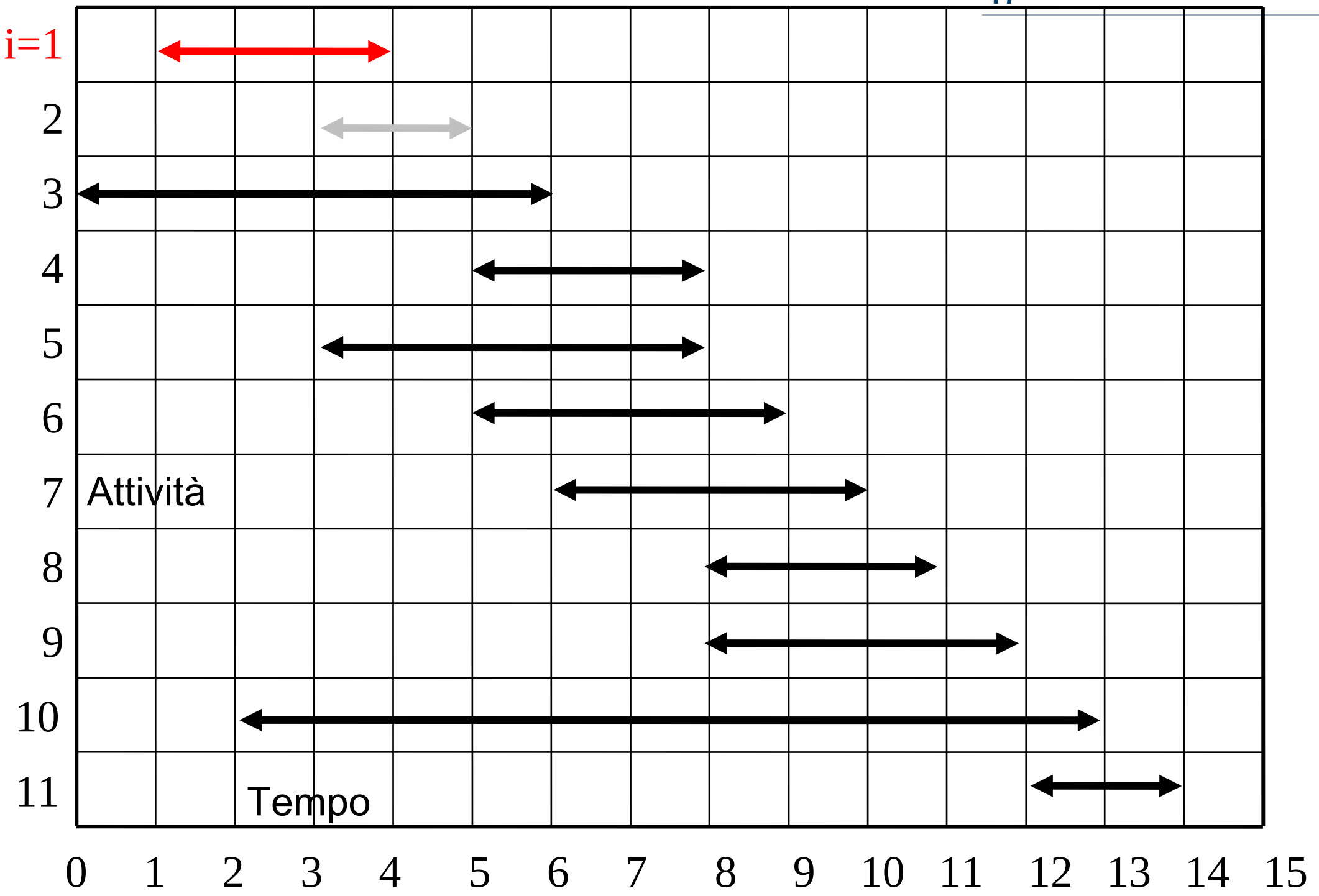
Implementazione ricorsiva

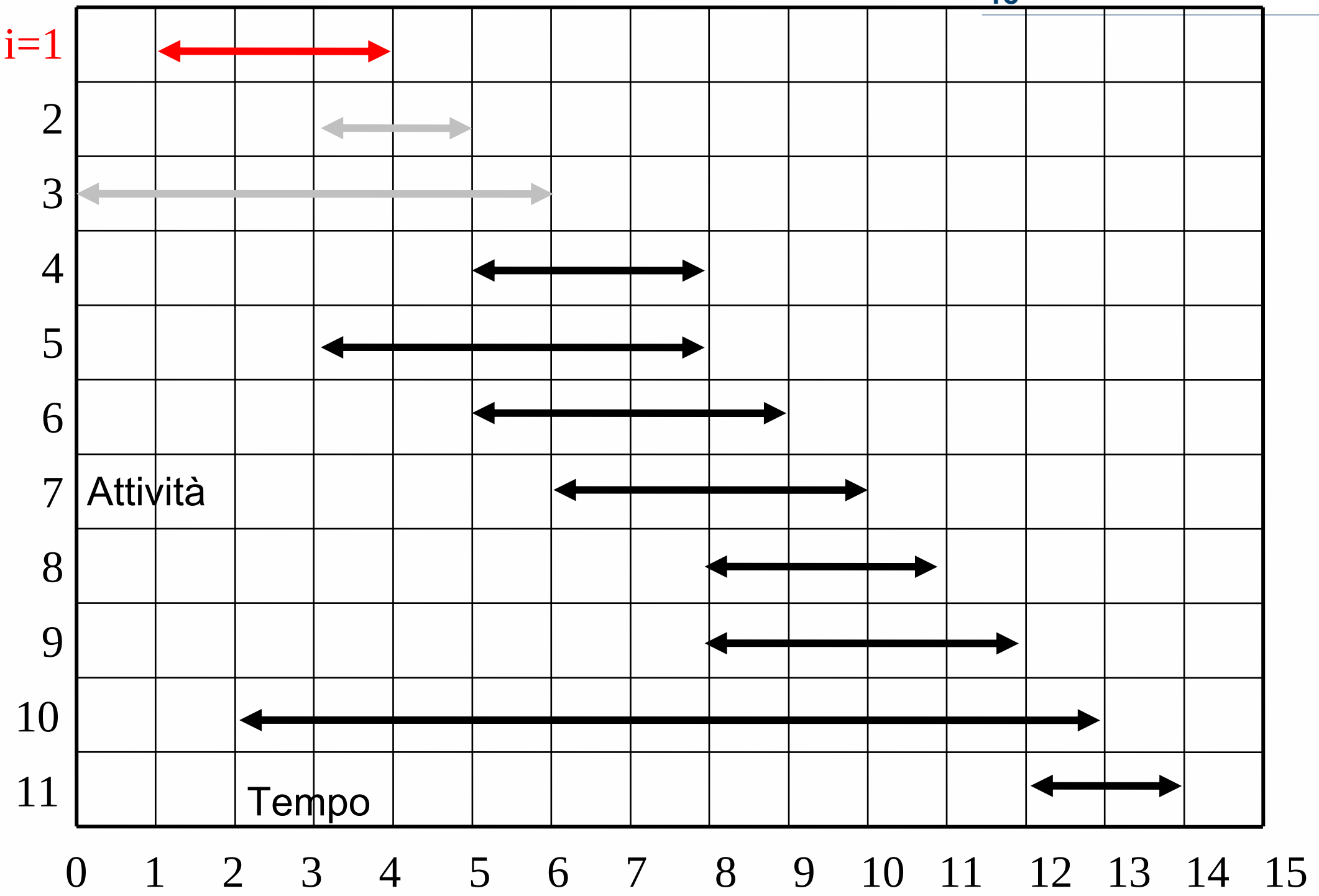

```
RGSA(s[0..n],f[0..n], i, len)
  m := i+1
  while m ≤ len and s[m] < f[i] do m := m+1
  if m ≤ len then
    return { m } ∪ RGSA(s, f, m, len)
  else
    return ∅
```

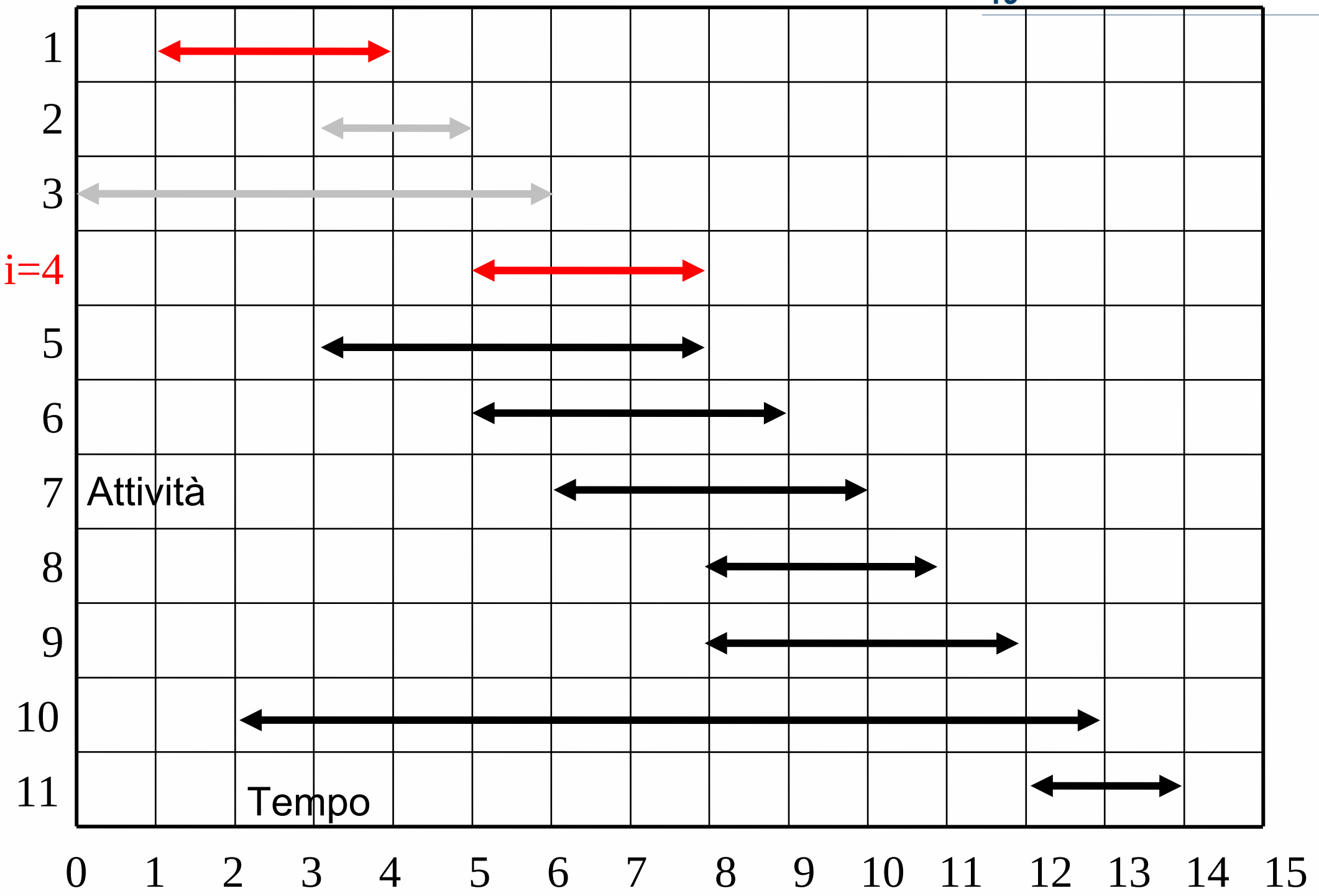
- Descrizione:
  - Chiamata iniziale: RGSA(s, f, 0, n)
  - Cerca il nuovo valore di m: il primo compatibile con i
  - Chiama ricorsivamente RGSA() e unisci la soluzione a m

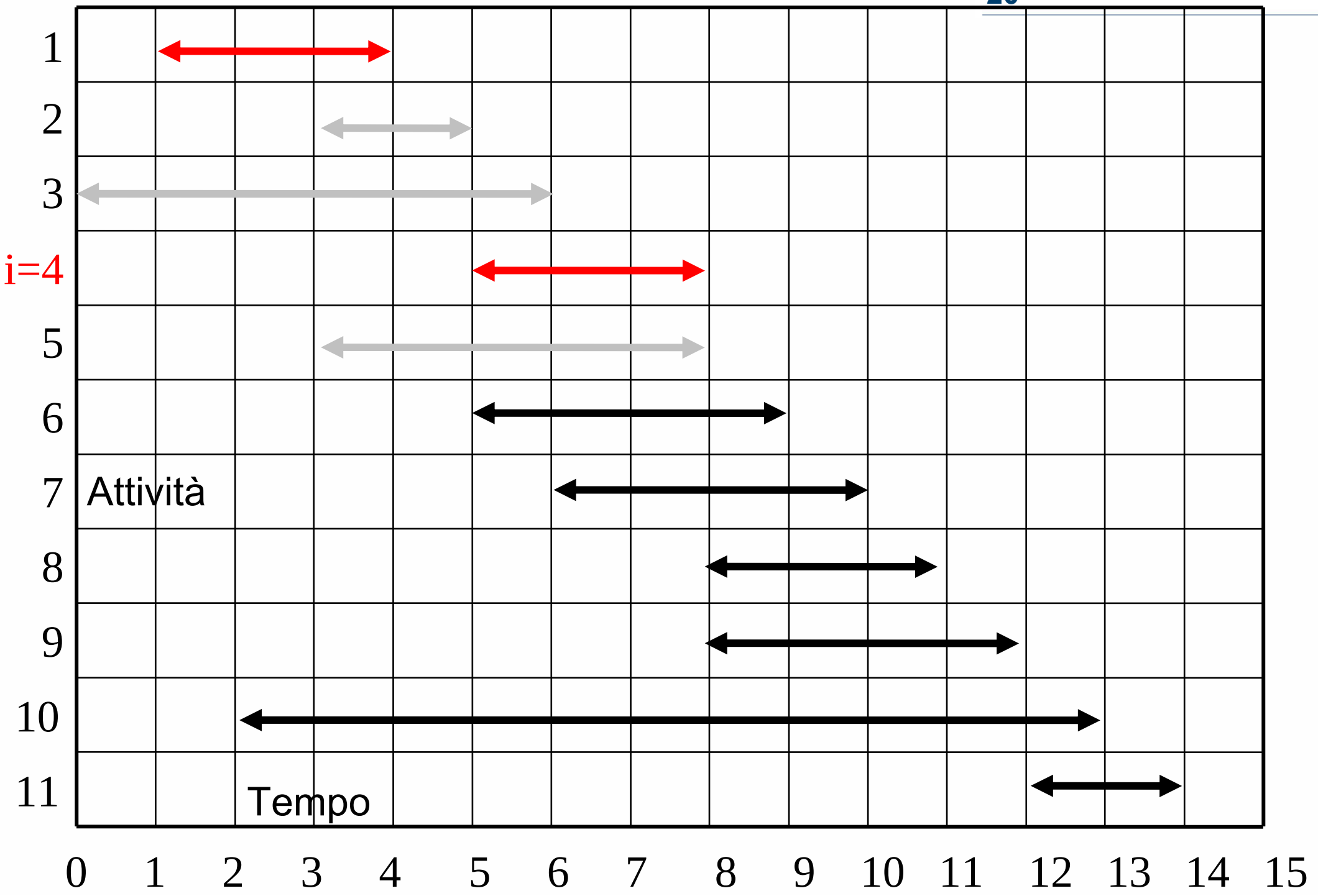

i=0
1
2
3
4
5
6
7
Attività
8
9
10
11
Tempo
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15

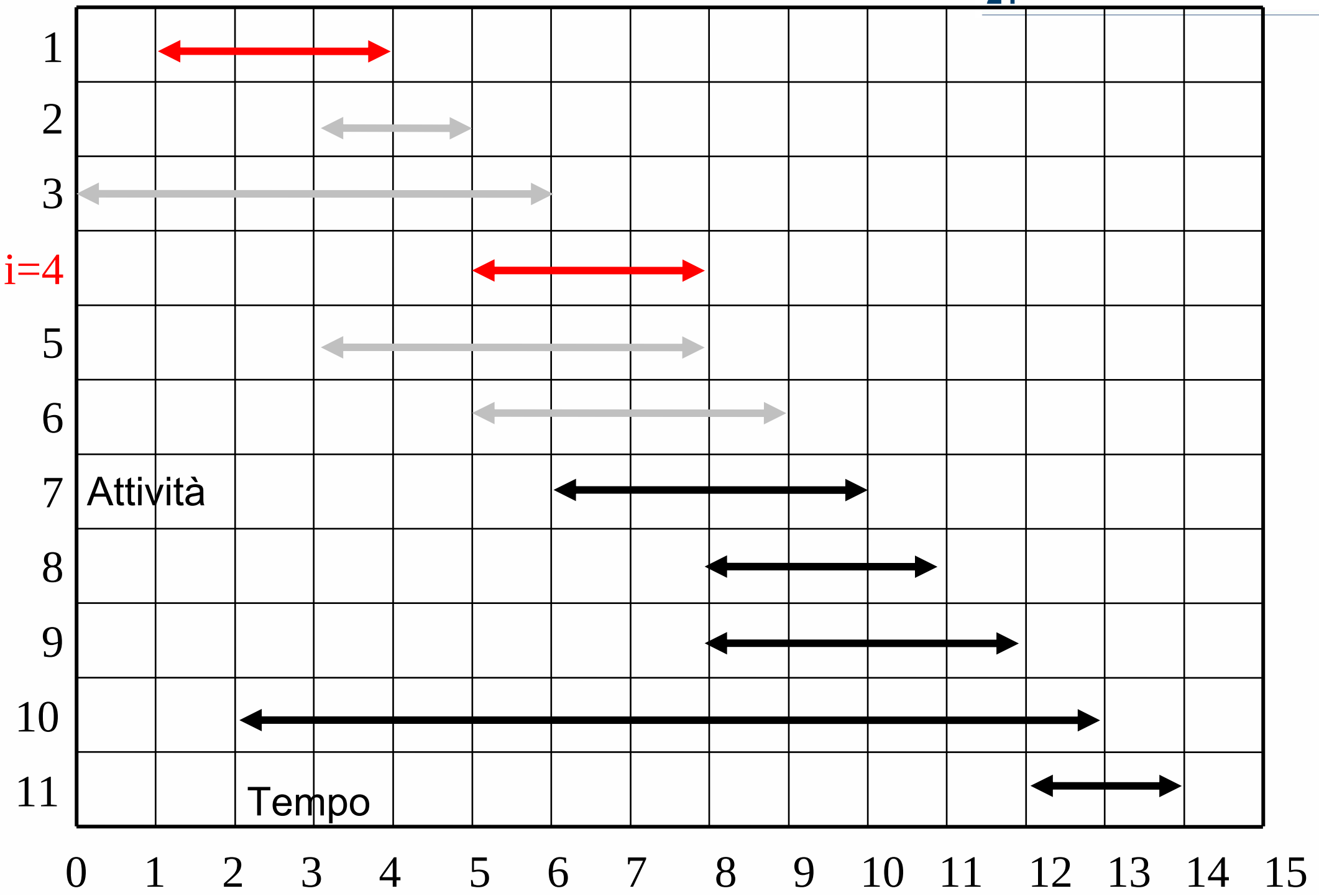

i=1
2
3
4
5
6
7
Attività
8
9
10
11
Tempo
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15

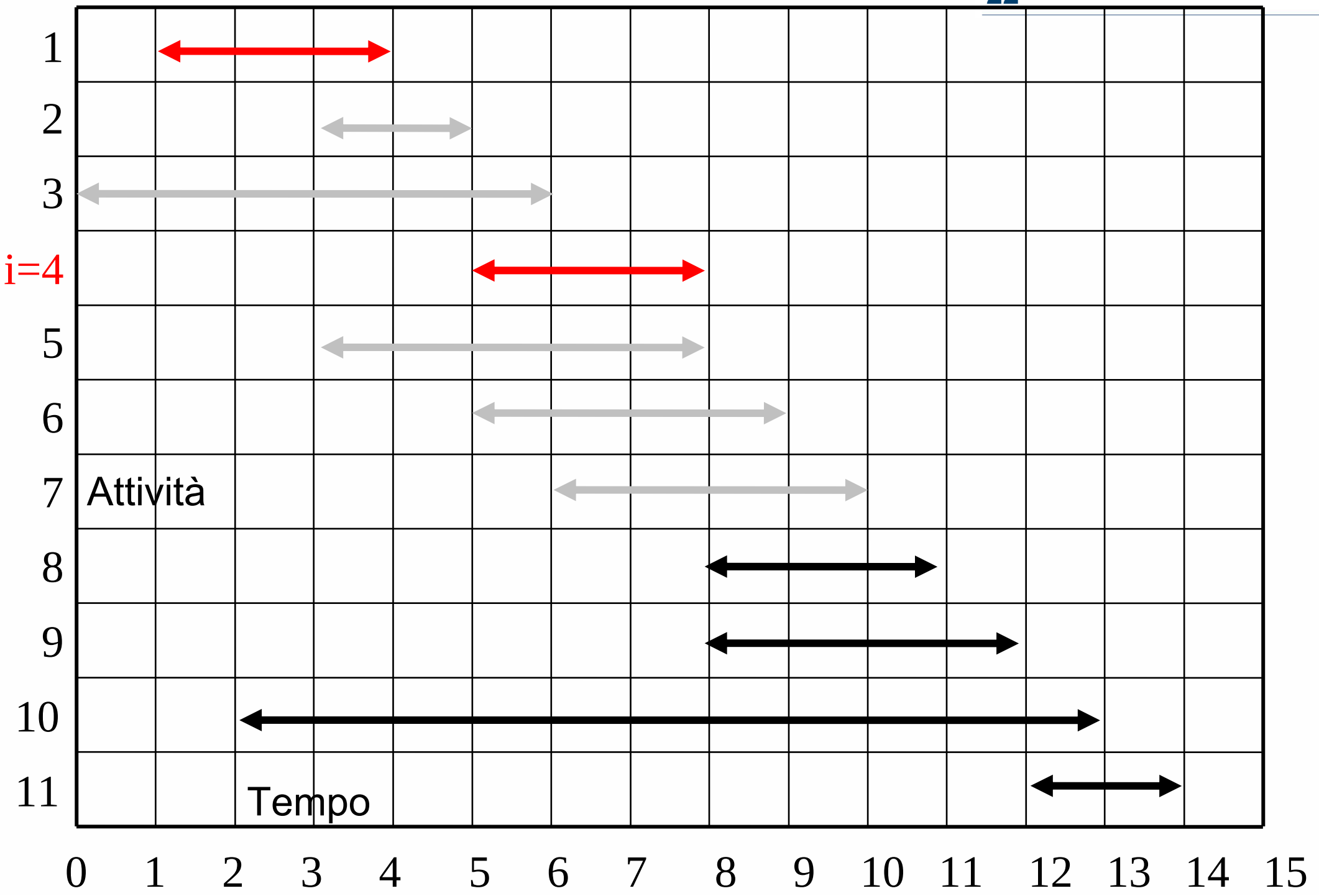

i=1
2
3
4
5
6
7
Attività
8
9
10
11
Tempo
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15

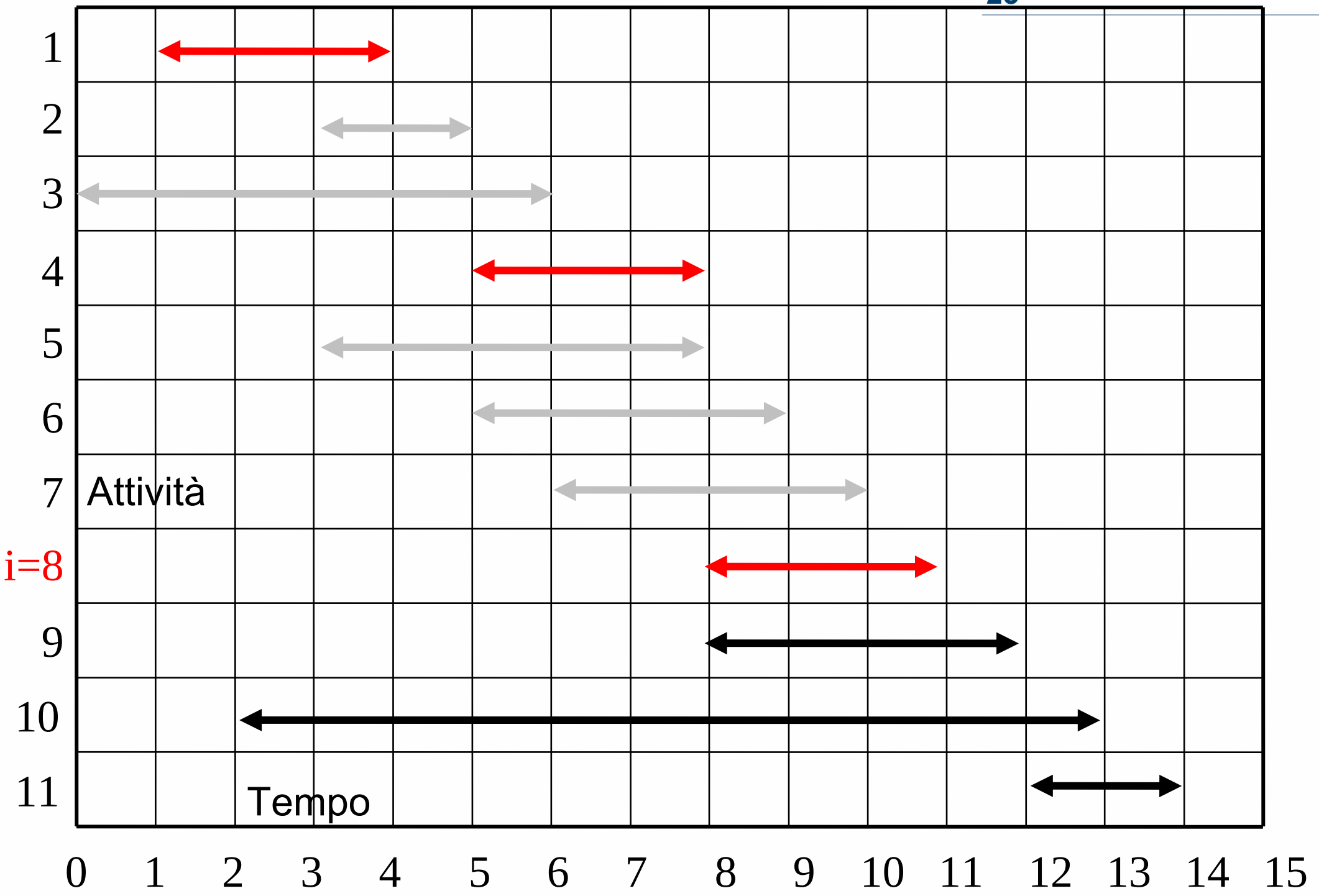

i=1
2
3
4
5
6
7
Attività
8
9
10
11
Tempo
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15

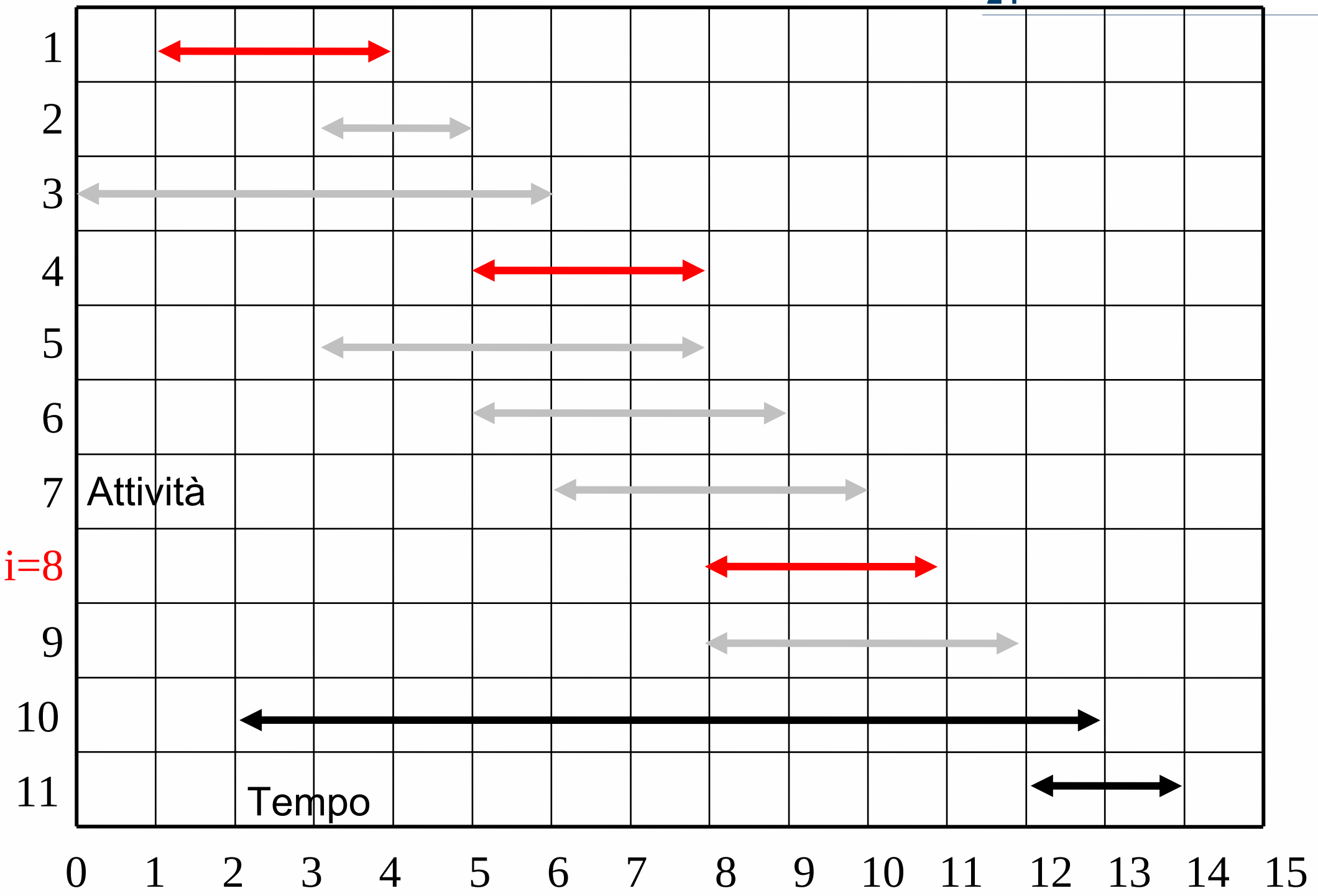

1
2
3
i=4
5
6
7
Attività
8
9
10
11
Tempo
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15

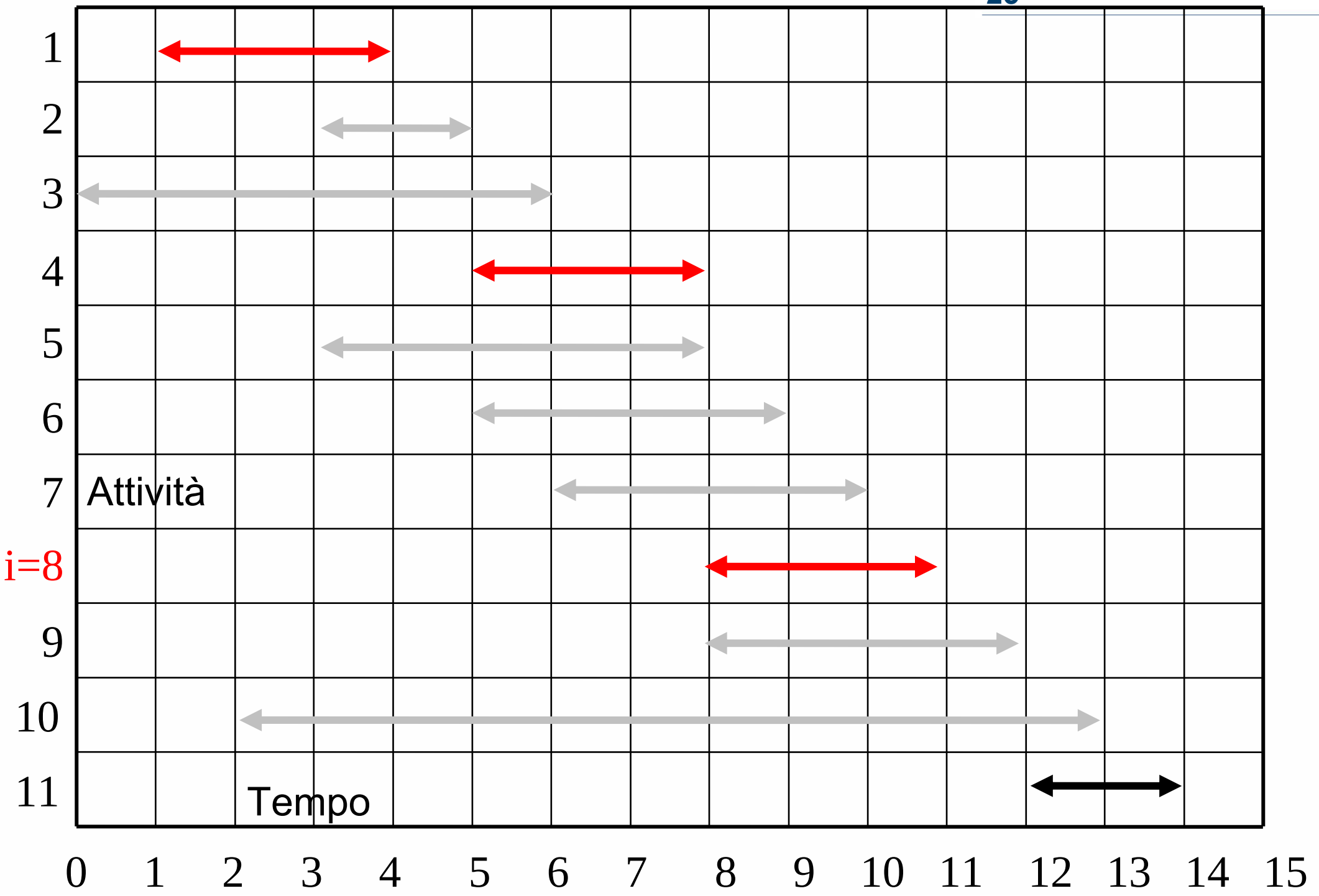

1
2
3
i=4
5
6
7
Attività
8
9
10
11
Tempo
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15

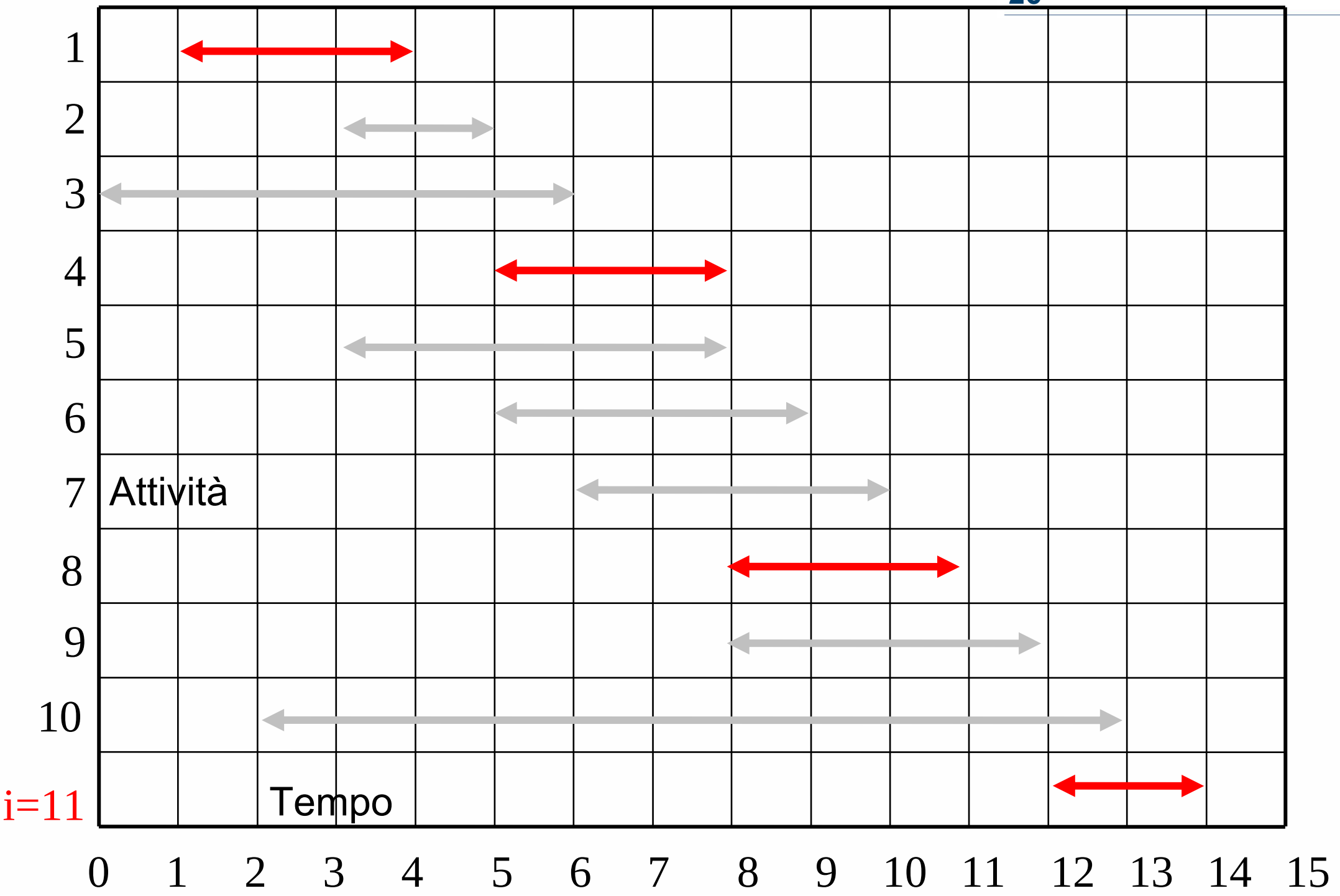

1
2
3
i=4
5
6
7
Attività
8
9
10
11
Tempo
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15


1
2
3
i=4
5
6
7
Attività
8
9
10
11
Tempo
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15


1
2
3
4
5
6
7
Attività
i=8
9
10
11
Tempo
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15


1
2
3
4
5
6
7
Attività
i=8
9
10
11
Tempo
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15


1
2
3
4
5
6
7
Attività
i=8
9
10
11
Tempo
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15


1
2
3
4
5
6
7
Attività
8
9
10
i=11
Tempo
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15

Implementazione iterativa

```
Greedy-Activity-Selection(s[1..n],f[1..n])
  A := {1}
  j := 1
  for m := 2 to n do
    if s[m] ≥ f[j] then
      A := A ∪ {m}
      j := m
  return A
```

- Complessità
  - Inserisce la prima attività: è sempre compatibile
  - Se l'input è già ordinato: θ(n)
  - Altrimenti, è necessario un passo di ordinamento: θ(n log n)

In generale…

Come applicare un algoritmo greedy?

- Evidenziare i "passi di decisione"
  - Trasformare il problema di ottimizzazione in un problema di "scelte" successive
- Evidenziare una possibile scelta greedy
  - Dimostrare che esiste almeno una soluzione ottima che contiene la scelta greedy ("principio della scelta greedy")
- Evidenziare la sottostruttura ottima
  - Dimostrare che la soluzione ottima del problema "residuo" dopo la scelta ingorda può essere unito a tale scelta
- Attenzione: se non vale il principio della scelta greedy non si ha più la garanzia che l'algoritmo troverà una soluzione ottima

Esercizio: problema del resto

- Input
  - Un numero intero positivo *n*
- Output
  - Il più piccolo numero intero di pezzi per dare un resto di *n* centesimi utilizzando monete da 50c, 10c, 5c e 1c.
- Esempi
  - n = 78, 6 pezzi: 50+20+5+1+1+1
  - n = 18, 5 pezzi: 10+5+1+1+1

Esercizio: problema del resto (2)

- Domanda 1
  - Descrivere un algoritmo greedy per dare il resto con le monete specificate
    - Sottostruttura ottima
    - Scelta ingorda
  - Provare che tale algoritmo fornisce sempre una soluzione ottima
- Domanda 2
  - Supponete di avere un insieme di monete i cui valori siano potenze consecutive di c: c^0, c^1, c^2, ..., c^k
  - L'algoritmo individuato in precedenza funziona ancora?
- Domanda 3
  - Trovare un insieme di "pezzature" per cui la scelta greedy non è applicabile

Codici di Huffman

Problema della compressione

- Rappresentare i dati in modo efficiente
  - Impiegare il numero minore di bit per la rappresentazione
  - Goal: risparmio spazio su disco e tempo di trasferimento
- Una possibile tecnica di compressione: *codifica di caratteri*
  - Tramite *funzione di codifica f: f(c) = x*
    - *c* è un possibile carattere preso da un alfabeto Σ
    - *x* è una rappresentazione binaria
    - "*c* è rappresentato da *x*"

Codici di Huffman

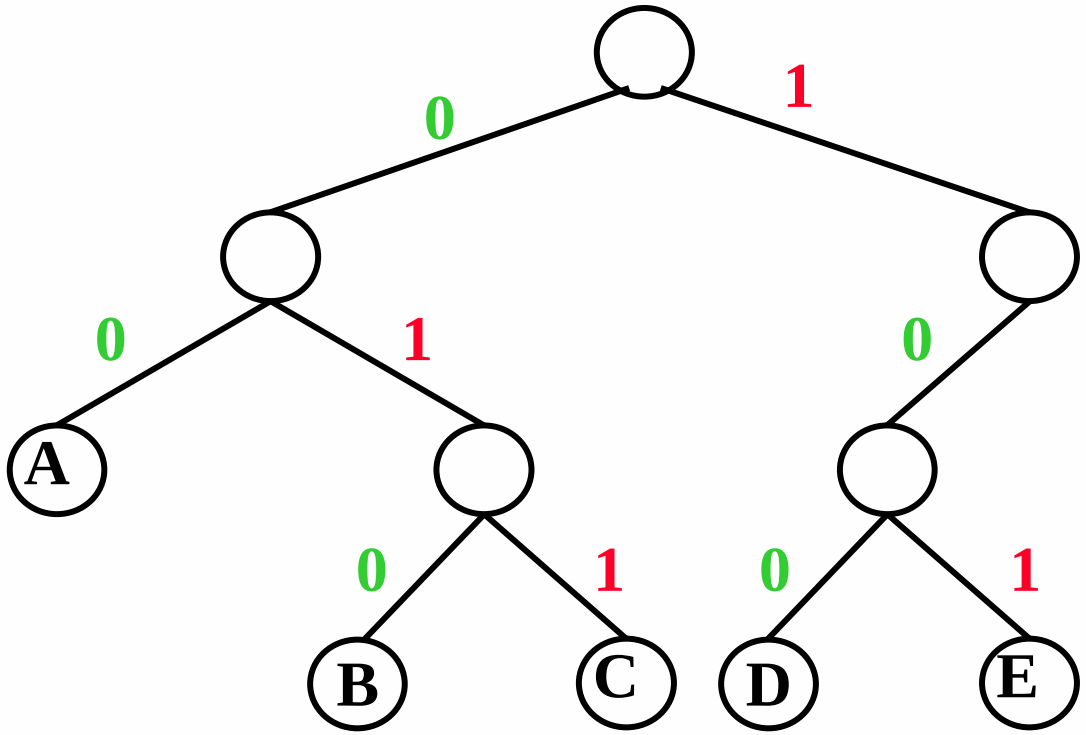
- Supponiamo di avere un file di *n* caratteri
  - Composto dai caratteri: **a b c d e f**
  - Con le seguenti frequenze: **45% 13% 12% 16% 9% 5%**
- Codifica tramite ASCII (8 bit per carattere)
  - Dimensione totale: 8n bit
- Codifica basata sull'alfabeto (3 bit per carattere)
  - Codifica: **000 001 010 011 100 101**
  - Dimensione totale: 3n bit
- Possiamo fare di meglio?

Codici di Huffman

- Codifica a lunghezza variabile
  - Caratteri: **a b c d e f**
  - Codifica: **0 101 100 111 1101 1100**
  - Costo totale: (0.45*1+0.13*3+0.12*3+0.16*3+0.09*4+0.05*4)*n=2.24n
- Codice "a prefisso" (meglio, "senza prefissi"):
  - Nessun codice è prefisso di un altro codice
  - Condizione necessaria per permettere la decodifica
- Esempio:
  - 0111111001011000 -> "ADDAABCA"
  - Se f(a) = 1 f(b) = 11, 11 → "b" oppure "aa" ??

Rappresentazione ad albero per la decodifica

- Rappresentazione come alberi binari
  - Figlio sinistro: 0 Figlio destro: 1
  - Caratteri dell'alfabeto sulle foglie



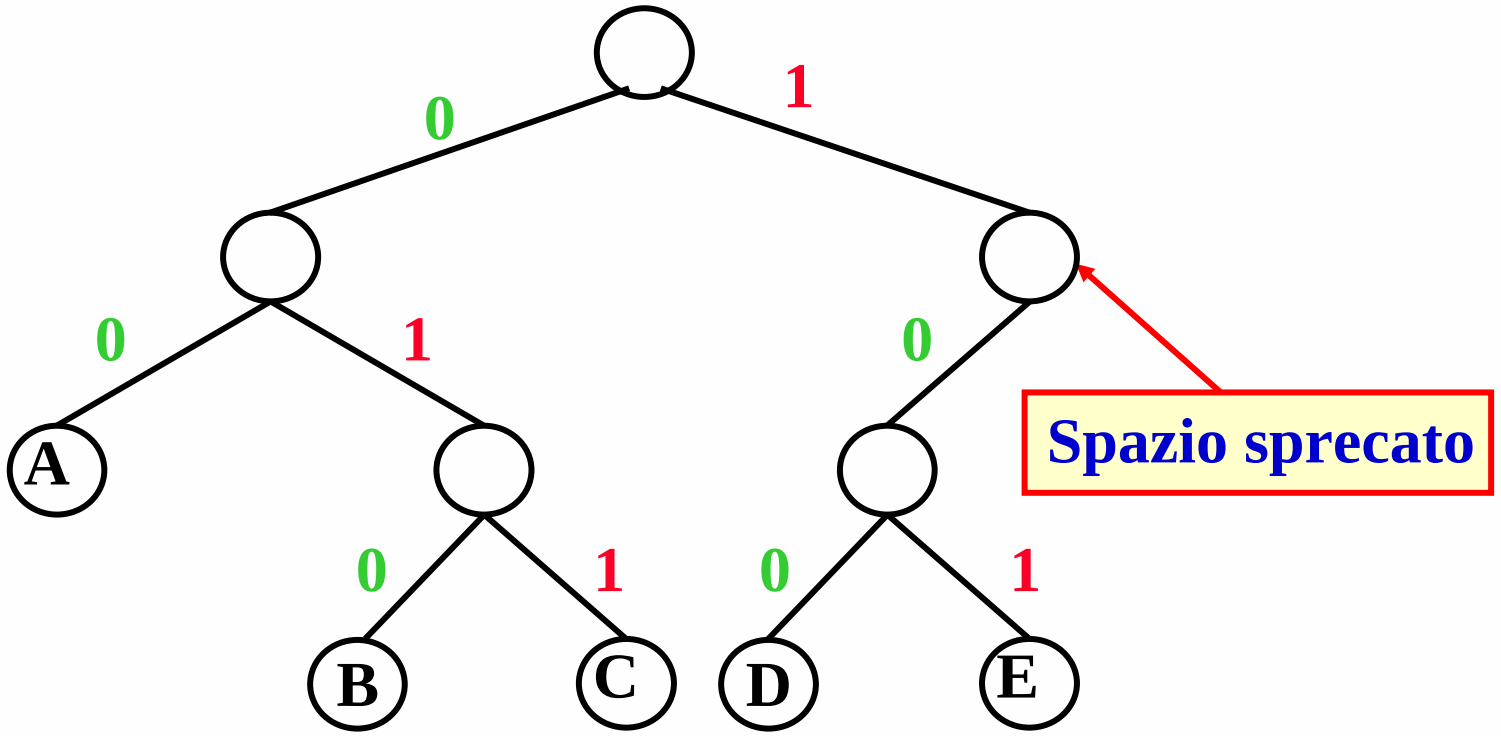
Algoritmo di decodifica:

1. parti dalla radice
2. leggi un bit alla volta percorrendo l'albero:
   0: sinistra
   1: destra
3. stampa il carattere della foglia
4. torna a 1

A: 00
B: 010
C: 011
D: 100
E: 101

Rappresentazione ad albero per la decodifica

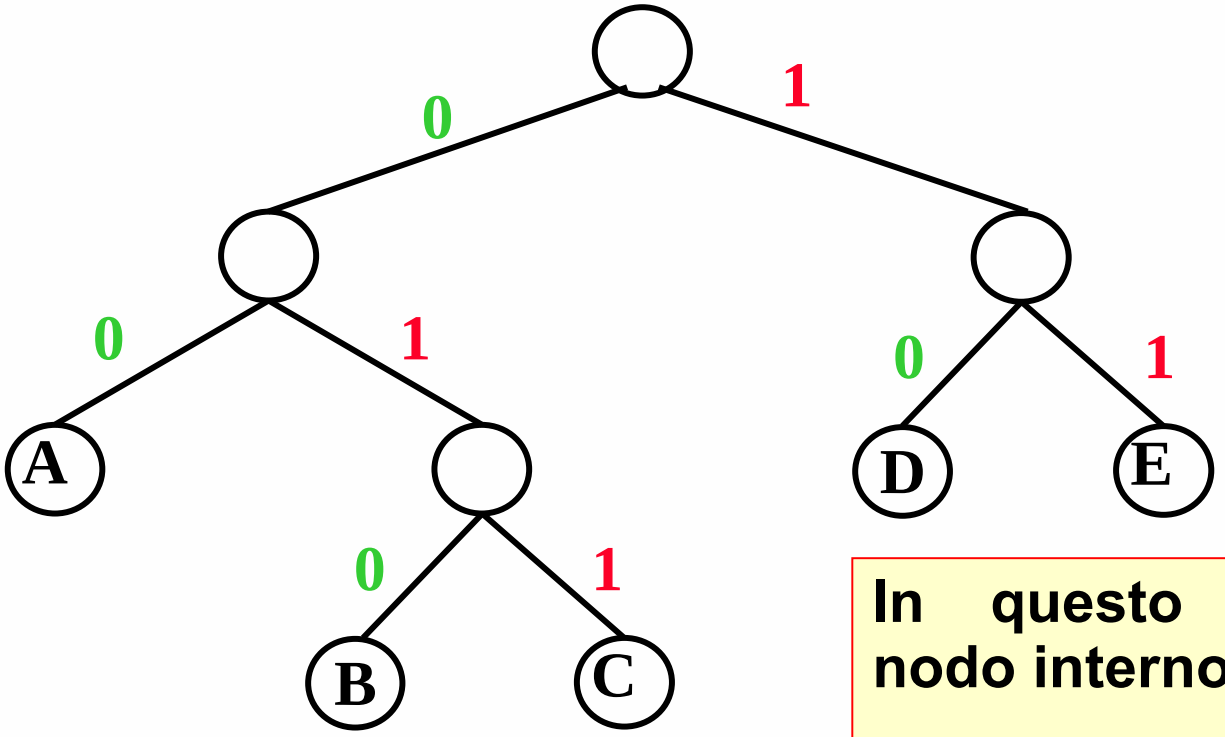
- Non c'è motivo di avere un nodo interno con un solo figlio
  - Il "figlio unico" può essere sostituito al proprio genitore
    - Sia che sia una foglia che un nodo interno



A: 00
B: 010
C: 011
D: 100
E: 101

Rappresentazione ad albero per la decodifica

- Non c'è motivo di avere un nodo interno con un solo figlio
  - Il "figlio unico" può essere sostituito al proprio genitore
    - Sia che sia una foglia che un nodo interno



In questo albero ogni nodo interno ha due figli

A: 00
B: 010
C: 011
D: 100
E: 101

A: 00
B: 010
C: 011
D: 10
E: 11

Definizione formale del problema

- Definizione: codice ottimo
  - Dato un file *F*, un codice *C* è ottimo per *F* se non esiste un altro codice tramite il quale *F* possa essere compresso impiegando un numero inferiore di bit.
- Nota:
  - Il codice ottimo dipende dal particolare file
  - Possono esistere più soluzioni ottime
- Teorema:
  - I codici a prefisso ottimi sono rappresentati da un albero in cui tutti i nodi interni hanno due figli

Definizione formale del problema

- Supponiamo di avere:
  - un file F composto da caratteri nell'alfabeto Σ
  - un albero T che rappresenta la codifica
- Quanti bit sono richiesti per codificare il file?
  - Per ogni $c \in \Sigma$, sia $d_T(c)$ la *profondità* della foglia che rappresenta c
  - Il codice per c richiederà allora $d_T(c)$ bit
- Se $f[c]$ è il numero di volte che c occorre in F, allora la dimensione della codifica è

$$C(F,T) = \sum_{c \in \Sigma} f[c] d_t(c)$$

Algoritmo di Huffman

- Principio del codice di Huffman
  - Minimizzare la lunghezza dei caratteri che compaiono più frequentemente
  - Assegnare ai caratteri con la frequenza minore i codici corrispondenti ai percorsi più lunghi all'interno dell'albero
- Un codice è progettato per un file specifico
  - Si ottiene la frequenza di tutti i caratteri
  - Si costruisce il codice
  - Si rappresenta il file tramite il codice

Passo 1: Costruire una lista di nodi foglia per ogni carattere, etichettato con la propria frequenza

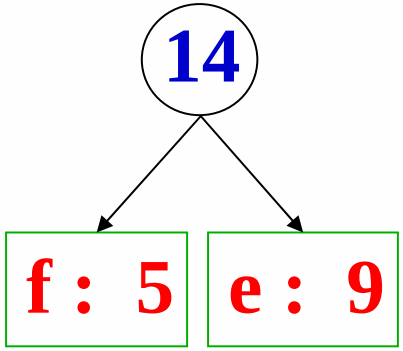
f : 5	e : 9	c : 12	b : 13	d : 16	a : 45

Costruzione del codice

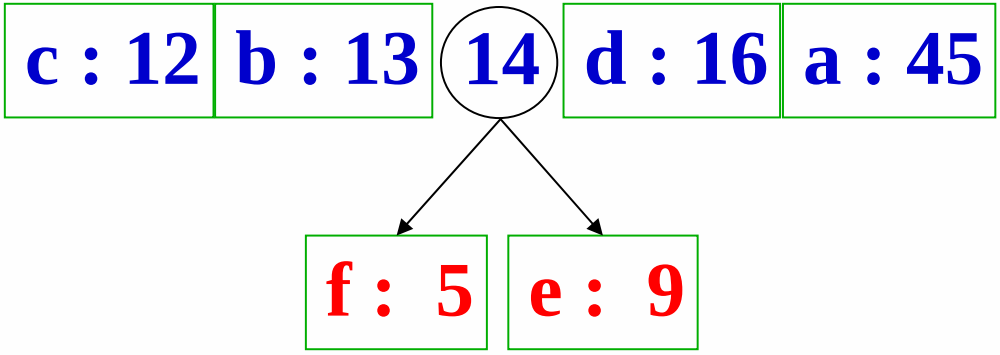
Passo 2: Rimuovere i due nodi "*più piccoli*" (con frequenze minori)

Passo 3: Collegarli ad un nodo padre etichettato con la frequenza combinata (sommata)

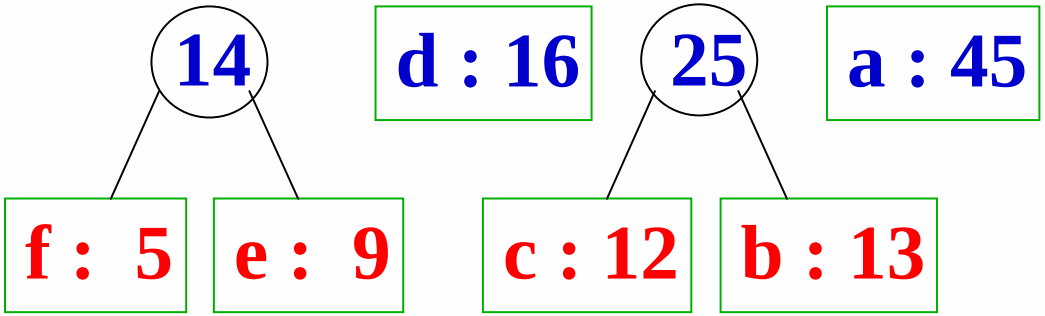
c : 12	b : 13	d : 16	a : 45



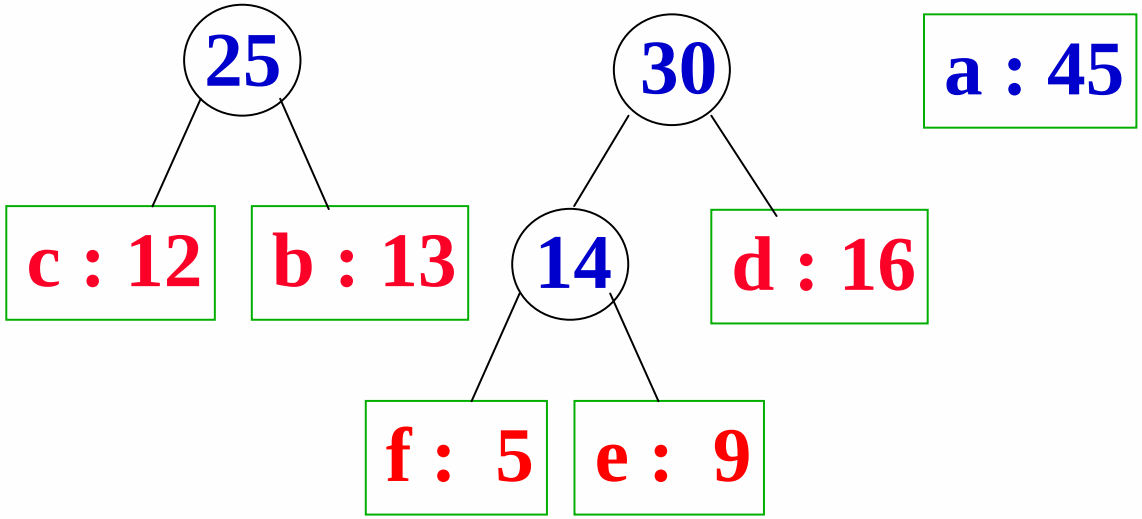
Passo 4: Aggiungere il nodo combinato alla lista.



Ripetere i passi 2-4 fino a quando non resta un solo nodo nella lista

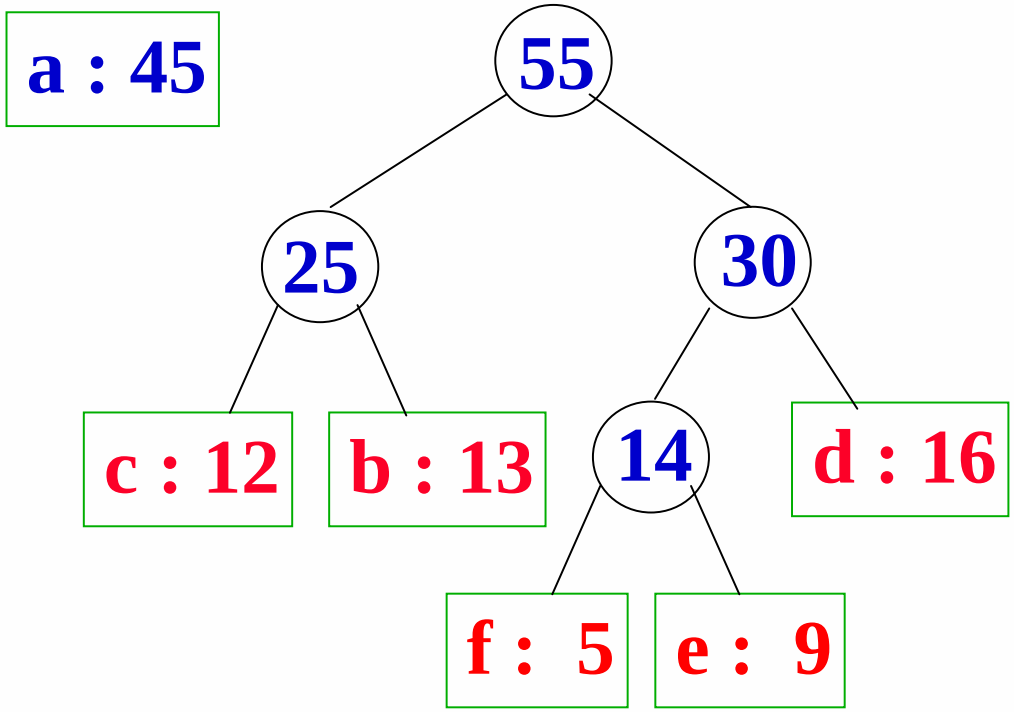


Ripetere i passi 2-4 fino a quando non resta un solo nodo nella lista



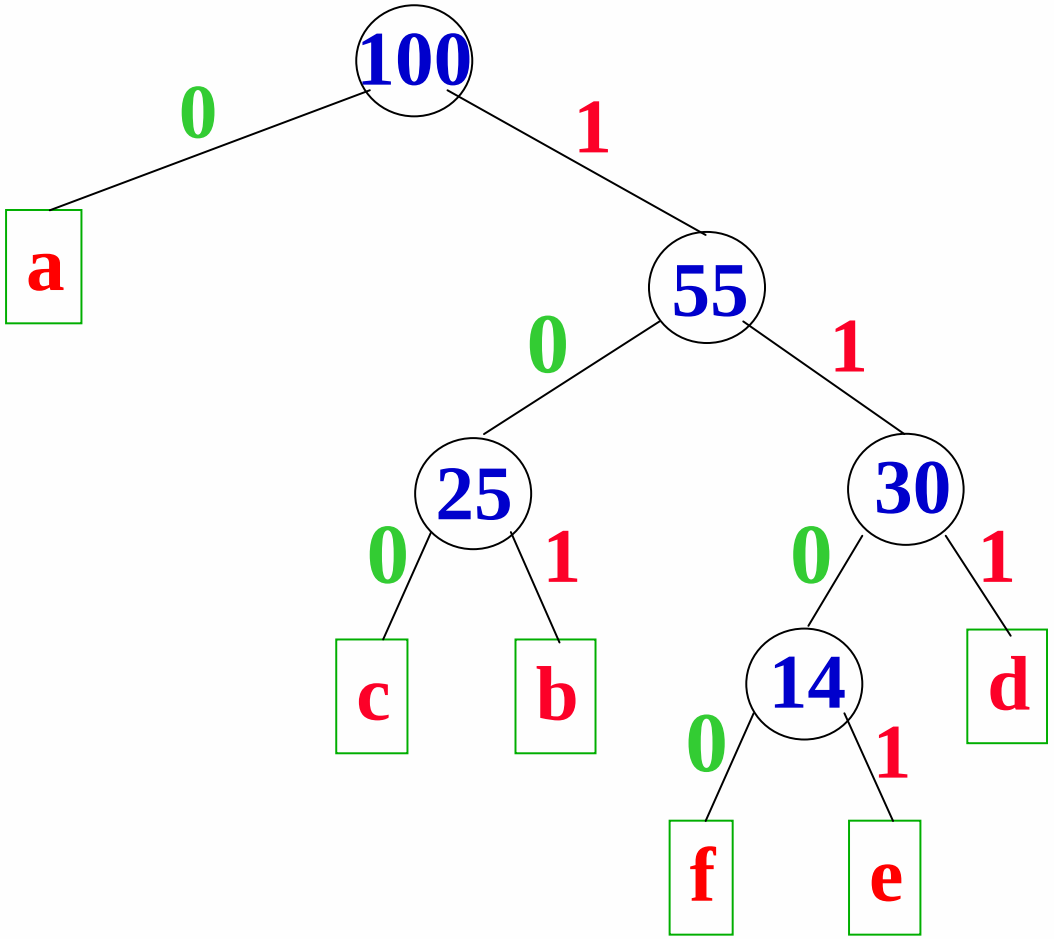
Costruzione del codice

Ripetere i passi 2-4 fino a quando non resta un solo nodo nella lista



Costruzione del codice

Al termine, si etichettano gli archi dell'albero con bit 0-1



Algoritmo in pseudo-codice


```
Huffman(f[1..n], c[1..n])
  Q := new PriorityQueue()
  for i := 1 to n
    z = new Tree(f[i], c[i])
    Q.enqueue(z)
  for i := 1 to n - 1
    z1 = Q.dequeue()
    z2 = Q.dequeue()
    z = new Tree(z1.f + z2.f, '')
    z.left = z1
    z.right = z2
    Q.enqueue(z)
  return Q.dequeue()
```

Tree:

f	// frequenza (key)
c	// carattere
left	// figlio sinistro
right	// figlio destro

Complessità
θ(n log n)

Dimostrazione

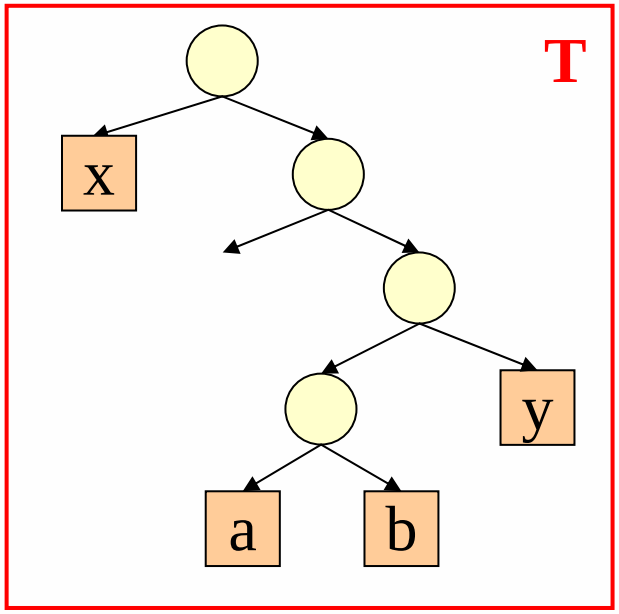
- Teorema: L'output dell'algoritmo Huffman per un dato file è un codice a prefisso ottimo
- Schema della dimostrazione:
  - *Sottostruttura ottima*
    - Dato un problema sull'alfabeto Σ, è possibile costruire un sottoproblema con un alfabeto più piccolo
  - *Proprietà della scelta greedy*
    - Scegliere i due elementi con la frequenza più bassa conduce sempre ad una soluzione ottimale

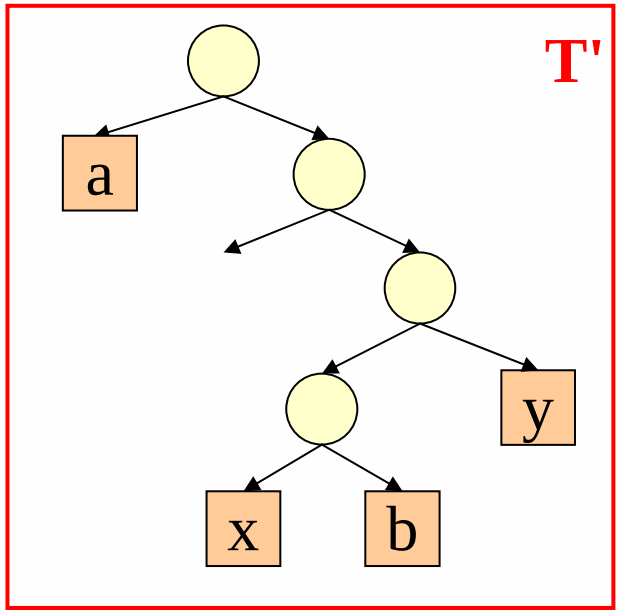
Scelta Greedy

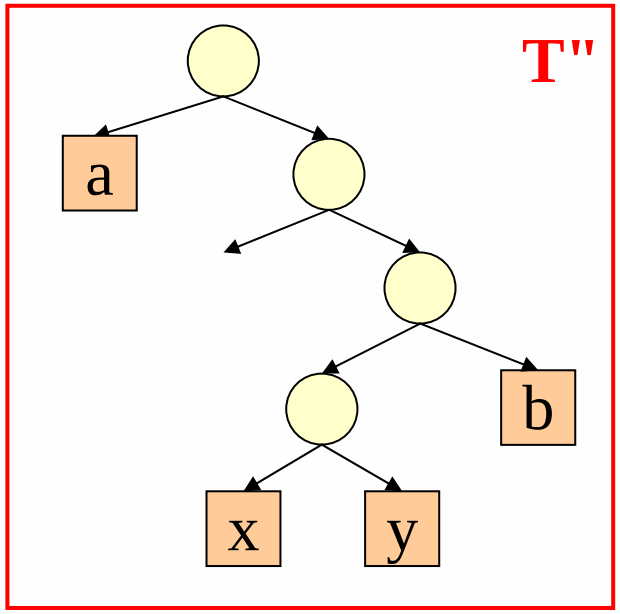
- Sia
  - Σ un alfabeto, f un array di frequenze
  - x, y i due caratteri che hanno frequenza più bassa
- Allora
  - Esiste un codice prefisso ottimo per Σ in cui *x,y* hanno *la stessa profondità massima* e i loro codici *differiscono solo per l'ultimo bit*
- Dimostrazione
  - Al solito, basata sulla trasformazione di una soluzione ottima
  - Supponiamo che esistano due caratteri *a,b* con profondità massima e questi siano diversi da x,y

Scelta Greedy

- Assumiamo (senza perdere in generalità): $f[x] \le f[y]$ $f[a] \le f[b]$
- Poiché le frequenze di x e y sono minime: $f[x] \le f[a]$ $f[y] \le f[b]$
- Scambiamo x con a: otteniamo T'
- Scambiamo y con b: otteniamo T"







Scelta greedy

- Otteniamo che

$$
\begin{aligned}
C(T) - C(T') &= \sum_{c \in \Sigma} f[c] d_T(c) - \sum_{c \in \Sigma} f[c] d_{T'}(c) \\
&= (f[x] d_T(x) + f[a] d_T(a)) - (f[x] d_{T'}(x) + f[a] d_{T'}(a)) \\
&= (f[x] d_T(x) + f[a] d_T(a)) - (f[x] d_T(a) + f[a] d_T(x)) \\
&= (f[a] - f[x])(d_T(a) - d_T(x)) \\
&\geq 0
\end{aligned}
$$

- In maniera analoga possiamo dimostrare che C(T') – C(T'')>=0
- Perciò C(T'')<=C(T) ed essendo T ottimo $\Rightarrow$ anche T'' è ottimo

Sottostruttura ottima

- Sia
  - Σ un alfabeto, f un array di frequenze
  - x, y i due caratteri che hanno frequenza più bassa
  - $\Sigma' = \Sigma - \{ x, y \} \cup \{ z \}$
  - f[z] = f[x] + f[y]
  - O un albero che rappresenta *un codice a prefisso ottimo per Σ'*
- Allora:
  - *L'albero T (ottenuto da O sostituendo il nodo foglia z con un nodo interno con due figli x,y) rappresenta un codice a prefisso ottimo per Σ*

Sottostruttura ottima

- Esprimiamo la relazione fra il costo di T e O
  - Per ogni $c \in \Sigma - \{ x,y \} \rightarrow f[c] \cdot d_T(c) = f[c] \cdot d_O(c)$
    Quindi tutte queste componenti sono uguali
  - $d_T(x) = d_T(y) = d_O(z)+1$
    - da cui concludiamo
      - $f[x] \cdot d_T(x) + f[y] \cdot d_T(y) =$
        $(f[x] + f[y])(d_O(z)+1) =$
        $f[z] \cdot d_O(z) + f[x] + f[y]$
    - da cui concludiamo
      - $C(f, T) = C(f, O) + f[x] + f[y]$
        $C(f, O) = C(f, T) - f[x] - f[y]$

Sottostruttura ottima

- Per assurdo: supponiamo T non sia ottimo
  - Allora esiste un albero T' tale che C(f, T') < C(f, T)
  - Senza perdere in generalità, sappiamo che T' ha x e y come foglie sorelle
  - Sia T'' l'albero ottenuto da T' sostituendo il padre di x,y con un nodo z tale che f[z] = f[x] + f[y]
- Allora
  - C(f, T'') = C(f, T') – f[x] – f[y]
    < C(f, T) – f[x] – f[y]
    = C(f, O)
  - Il che è assurdo, visto che O è ottimo