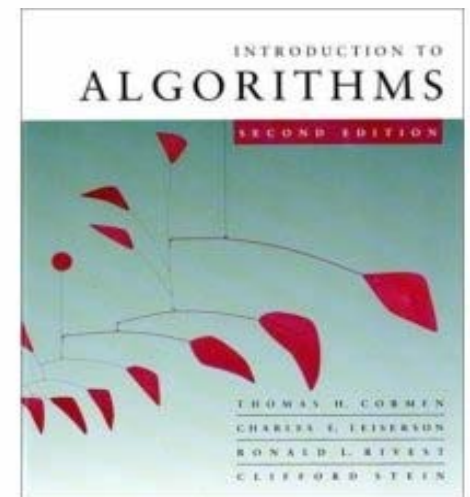




Algoritmi e Strutture Dati

Geometria Computazionale


- ❑ T.H. Cormen, C.E. Leiserson, R.L. Rivest, C. Stein Introduction to Algorithms, Second Edition
- ❑ Queste trasparenze sono disponibili su <http://dei.polimi.it/upload/loiacono>
- ❑ Materiale rilasciato con licenza Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike License (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/2.5/>)



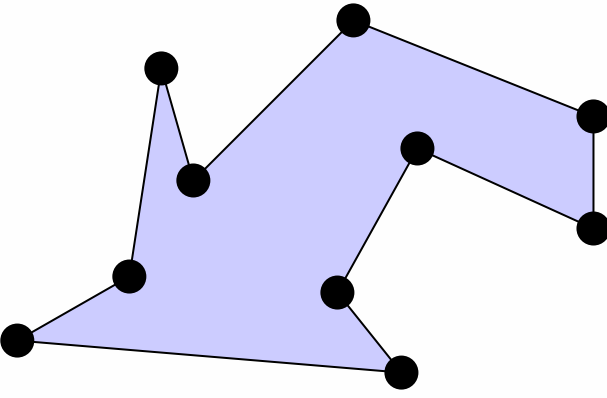
- ❑ La geometria computazionale è lo studio di algoritmi per risolvere problemi geometrici
- ❑ Lavora con...



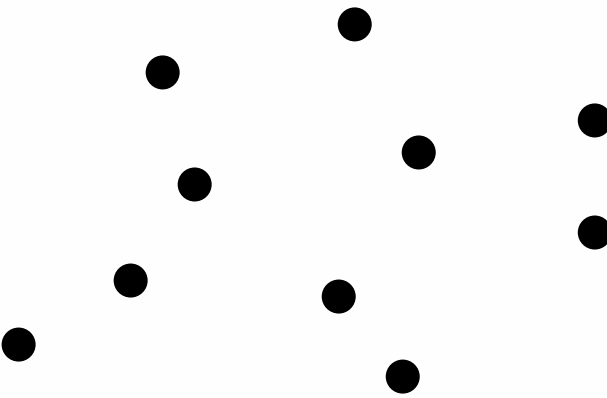
punti



segmenti



poligoni



set di punti

- ❑ La geometria computazionale si occupa di risolvere problemi come:
 - ▶ Involuppo convesso: il più piccolo poligono convesso che contiene un insieme di punti
 - ▶ Intersezione di figure e di segmenti
 - ▶ Localizzazione di punti: dati un insieme di punti, quali cadono all'interno di una figura?
 - ▶ Trovare la coppia di punti in un set più vicini fra loro
- ❑ Questi problemi e altri simili hanno applicazioni in diversi ambiti: grafica, robotica, telecomunicazioni, ecc.

Problemi di base

❑ Problema

- ▶ Dati due segmenti P_0P_1 e P_0P_2 , il segmento P_0P_1 segue in senso orario P_0P_2 o antiorario?

❑ Soluzione

- ▶ $(x_1-x_0)(y_2-y_0) - (x_2-x_0)(y_1-y_0) > 0 \Rightarrow P_0P_1$ segue in senso orario P_0P_2
- ▶ $(x_1-x_0)(y_2-y_0) - (x_2-x_0)(y_1-y_0) < 0 \Rightarrow P_0P_1$ segue in senso antiorario P_0P_2

❑ Dimostrazione

- ▶ La soluzione si basa sul prodotto vettoriale: $|P_0P_1 \times P_0P_2| = |P_0P_1||P_0P_2|\sin\theta$, dove θ è l'angolo che formano



- ▶ Se P_0 coincide con l'origine, $|P_0P_1| = (x_1-x_0)i + (y_1-y_0)j$ e $|P_0P_2| = (x_2-x_0)i + (y_2-y_0)j$, con i e j vettori di lunghezza unitaria e paralleli agli assi
- ▶ Allora $|P_0P_1 \times P_0P_2| = (x_1-x_0)(x_2-x_0)ixi + (y_2-y_0)(y_1-y_0)jxj + (x_1-x_0)(y_2-y_0)ixj + (x_2-x_0)(y_1-y_0)jxi = (x_1-x_0)(y_2-y_0) - (x_2-x_0)(y_1-y_0)$
- ▶ Dal risultato è possibile capire se $\theta < 180$ oppure se $\theta > 180$

□ Problema

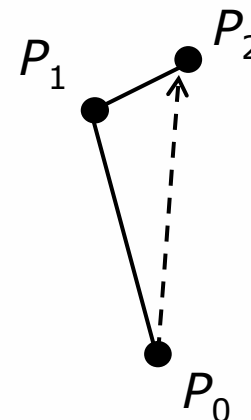
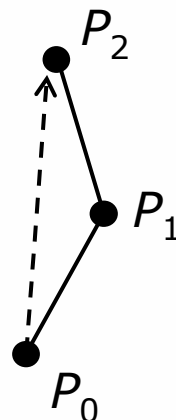
- ▶ Dati due segmenti consecutivi P_0P_1 e P_1P_2 , i due segmenti “svoltano” a sinistra oppure a destra in P_1 ?

□ Soluzione

- ▶ $(x_1-x_0)(y_2-y_0) - (x_2-x_0)(y_1-y_0) > 0 \Rightarrow$ i due segmenti svoltano a sinistra
- ▶ $(x_1-x_0)(y_2-y_0) - (x_2-x_0)(y_1-y_0) < 0 \Rightarrow$ i due segmenti svoltano a destra

□ Dimostrazione

- ▶ È sufficiente considerare i due segmenti P_0P_1 e P_0P_2
- ▶ Se P_0P_1 segue in senso orario P_0P_2 allora i due segmenti svoltano a sinistra, altrimenti svoltano a destra

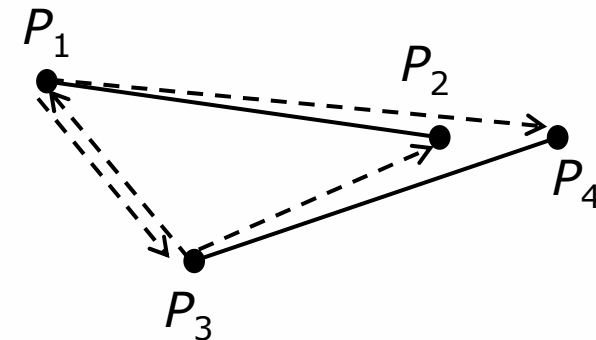
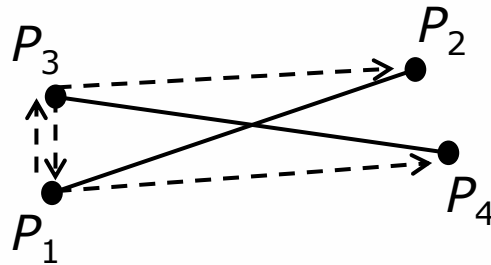


□ Problema

- ▶ Dati due segmenti P_1P_2 e P_3P_4 , si intersecano?

□ Soluzione

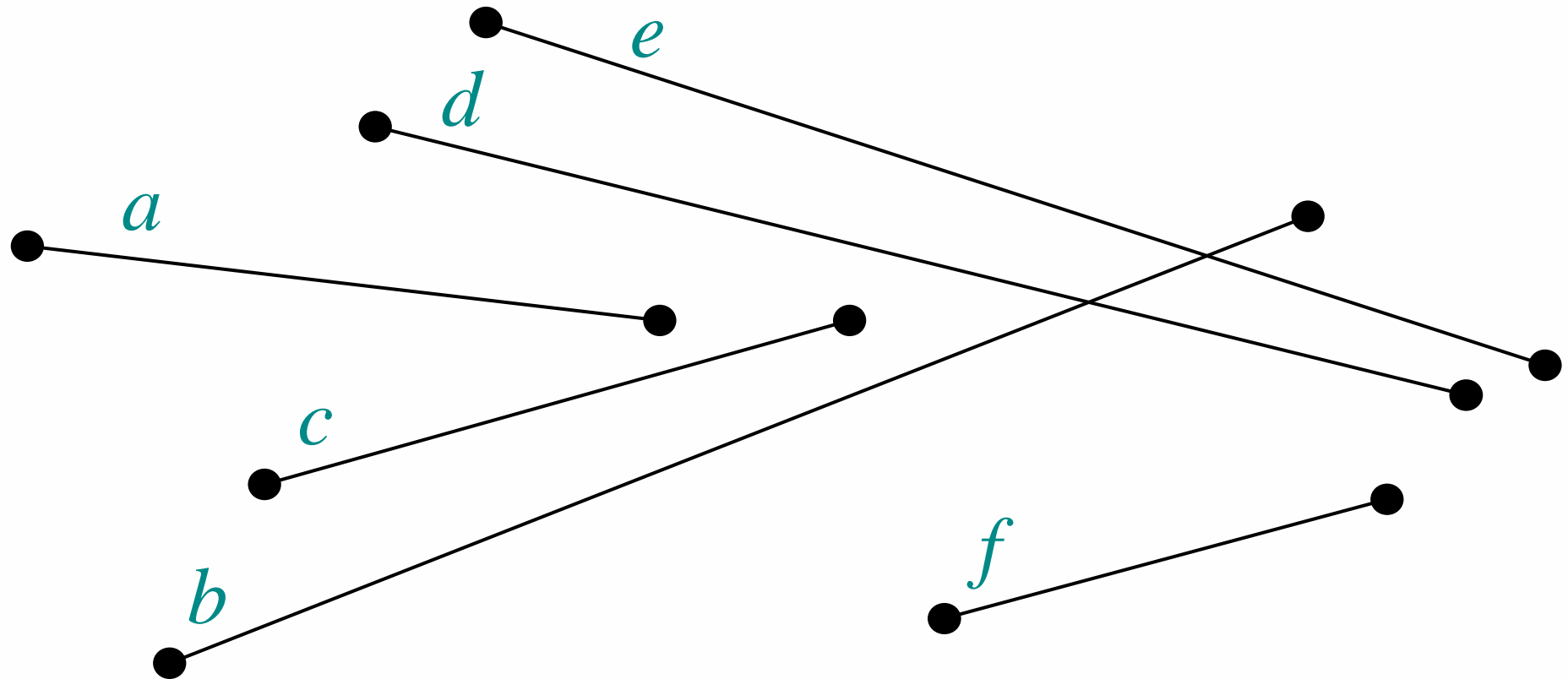
- ▶ I due segmenti si intersecano se valgono entrambe le condizioni:
 - P_1 e P_2 si trovano da parti opposte rispetto al segmento P_3P_4
 - P_3 e P_4 si trovano da parti opposte rispetto al segmento P_1P_2
- ▶ Verificare le condizioni sopra riportate equivale a risolvere il problema dell'orientamento:

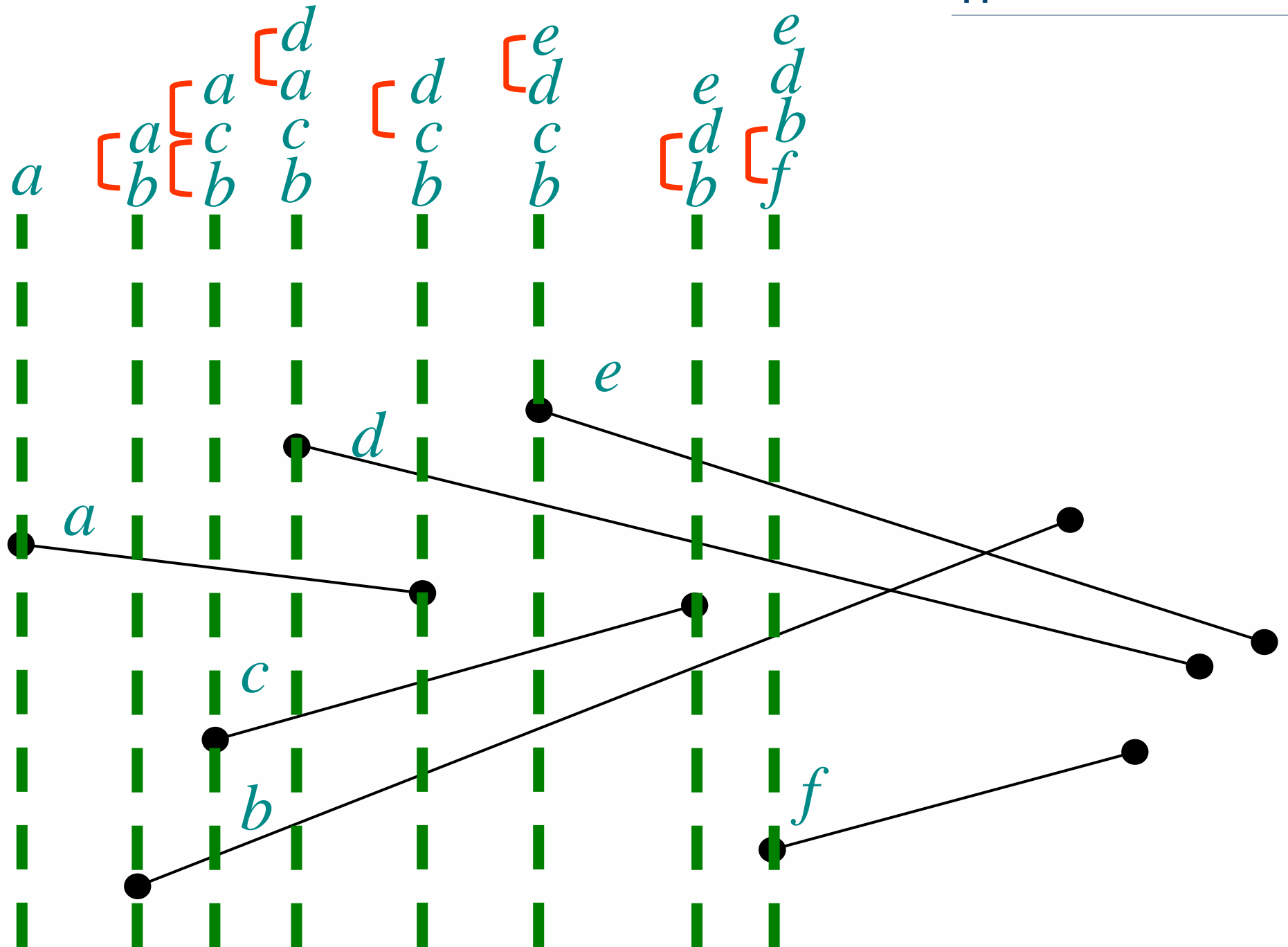


- ▶ Attenzione al caso in cui 3 o più estremi dei segmenti siano collineari

Intersezione di segmenti

- Dati n segmenti, esiste una coppia di segmenti che si intersecano fra di loro?
- Soluzione banale: $O(n^2)$



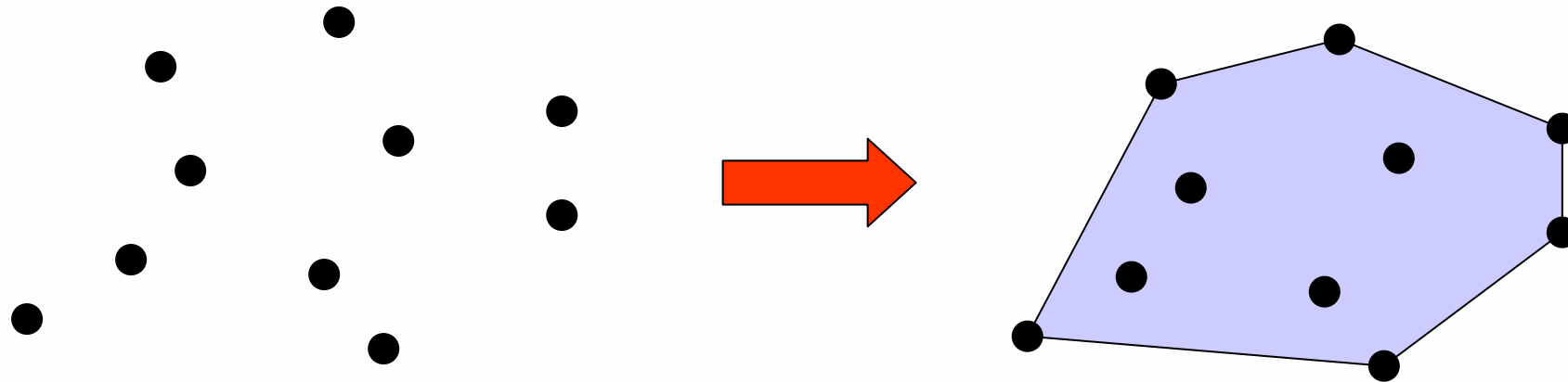


- ❑ Viene costruita una lista di “eventi” corrispondenti agli estremi dei segmenti, ordinati per ascisse crescenti
- ❑ Una ideale linea temporale scorre parallela all’asse delle ordinate
- ❑ Quando incontra un estremo sinistro di un segmento
 - ▶ Il segmento viene inserito in una lista
 - ▶ Si verifica se il segmento si interseca con il segmento immediatamente sopra o sotto
- ❑ Quando incontra un estremo destro di un segmento:
 - ▶ Il segmento viene rimosso dalla lista dei segmenti
 - ▶ Si verifica se i due segmenti che si trovano immediatamente sopra e immediatamente sotto a quello appena rimosso si intersecano
- ❑ Complessità
 - ▶ Verifica al più l’intersezione fra $2n$ coppie di segmenti
 - ▶ Richiede un ordinamento di $2n$ estremi

⇒ Costo complessivo $O(n \log n)$

Inviluppo convesso

- Dato un insieme di n punti, il loro **inviluppo convesso** è definito come il più piccolo poligono convesso che racchiude tutti i punti dati



- La soluzione è un insieme di punti ordinato che definiscono i vertici di un poligono
- Tutti i punti soluzione del problema appartengono all'insieme dato
- Il poligono dovrà avere da 3 ad n lati

- ❑ Soluzione a forza bruta
 - ▶ Consideriamo ciascuna coppia di punti P e Q nell'insieme dato
 - ▶ Se tutti gli altri punti si trovano dalla stessa parte rispetto al segmento PQ, allora PQ appartiene all'involuppo
- ❑ Costo computazionale
 - ▶ Occorre considerare tutte le coppie di punti nell'insieme dato
⇒ sono necessarie $\Theta(n^2)$ iterazioni
 - ▶ Ciascuna iterazione comporta l'analisi di tutti gli $n-2$ punti restanti
⇒ ogni iterazione costa $\Theta(n)$
 - ▶ Il costo totale è perciò $\Theta(n^3)$
- ❑ Possiamo fare di meglio?

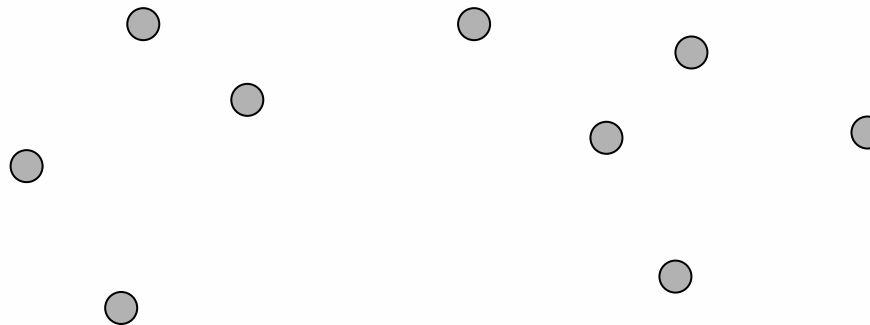
- ❑ Inizializzazione
 - ▶ Prendiamo tre punti
 - ▶ L'involuppo coincide con i tre punti stessi
- ❑ Passo induttivo:
 - ▶ Aggiungiamo un punto
 - ▶ Se il punto è interno, l'involuppo resta invariato
 - ▶ Se il punto è esterno
 - Lo aggiungo all'involuppo
 - Rimuovo dall'involuppo i punti interni
- ❑ Definizione della soluzione
 - ▶ Come aggiungo i punti?
 - ▶ Come determino i punti da rimuovere?

Soluzione incrementale: come aggiungo i punti?

- ❑ Ordiniamo i punti per ascissa crescente nell'insieme P
- ❑ Inizializzo l'involuppo L con i primi tre punti in P (cioè quelli con ascissa più bassa)
- ❑ I punti vengono inseriti nell'involuppo L in modo che seguano il senso orario
- ❑ Ad ogni passo consideriamo il punto successivo in P
 - ▶ Ha ascissa maggiore di tutti i punti presenti in L
 - ▶ Sarà perciò esterno all'involuppo definito da L e dovrà quindi essere aggiunto

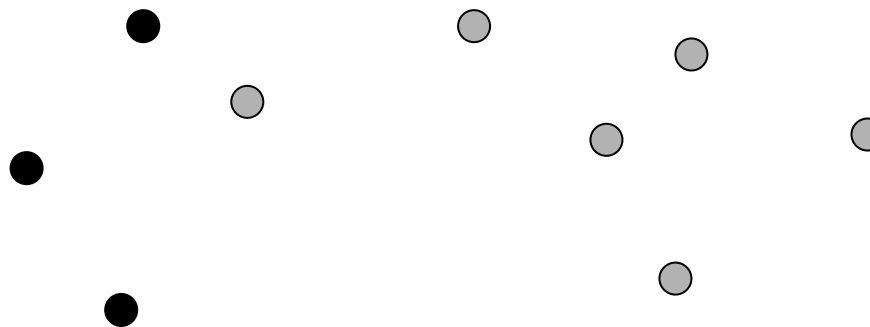
Soluzione incrementale: come aggiungo i punti?

- ❑ Ordiniamo i punti per ascissa crescente nell'insieme P
- ❑ Inizializzo l'involuppo L con i primi tre punti in P (cioè quelli con ascissa più bassa)
- ❑ I punti vengono inseriti nell'involuppo L in modo che seguano il senso orario
- ❑ Ad ogni passo consideriamo il punto successivo in P
 - ▶ Ha ascissa maggiore di tutti i punti presenti in L
 - ▶ Sarà perciò esterno all'involuppo definito da L e dovrà quindi essere aggiunto



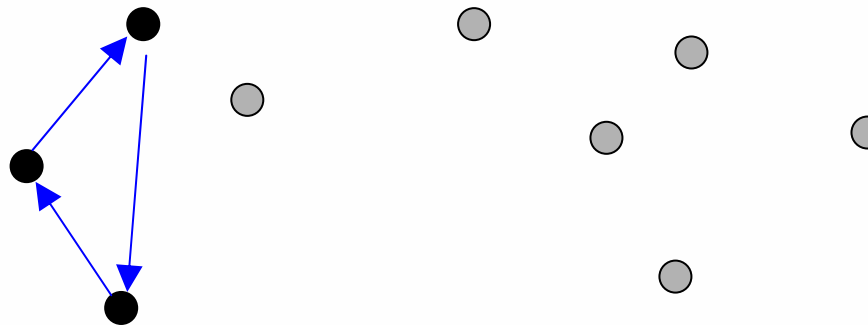
Soluzione incrementale: come aggiungo i punti?

- ❑ Ordiniamo i punti per ascissa crescente nell'insieme **P**
- ❑ Inizializzo l'involuppo **L** con i primi tre punti in **P** (cioè quelli con ascissa più bassa)
- ❑ I punti vengono inseriti nell'involuppo **L** in modo che seguano il senso orario
- ❑ Ad ogni passo consideriamo il punto successivo in **P**
 - ▶ Ha ascissa maggiore di tutti i punti presenti in **L**
 - ▶ Sarà perciò esterno all'involuppo definito da **L** e dovrà quindi essere aggiunto



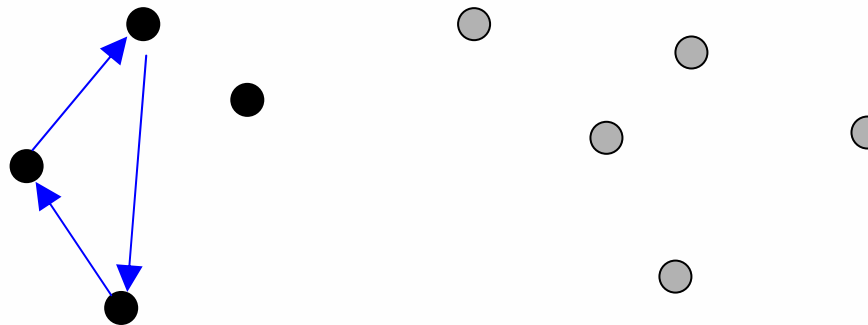
Soluzione incrementale: come aggiungo i punti?

- ❑ Ordiniamo i punti per ascissa crescente nell'insieme P
- ❑ Inizializzo l'involuppo L con i primi tre punti in P (cioè quelli con ascissa più bassa)
- ❑ I punti vengono inseriti nell'involuppo L in modo che seguano il senso orario
- ❑ Ad ogni passo consideriamo il punto successivo in P
 - ▶ Ha ascissa maggiore di tutti i punti presenti in L
 - ▶ Sarà perciò esterno all'involuppo definito da L e dovrà quindi essere aggiunto

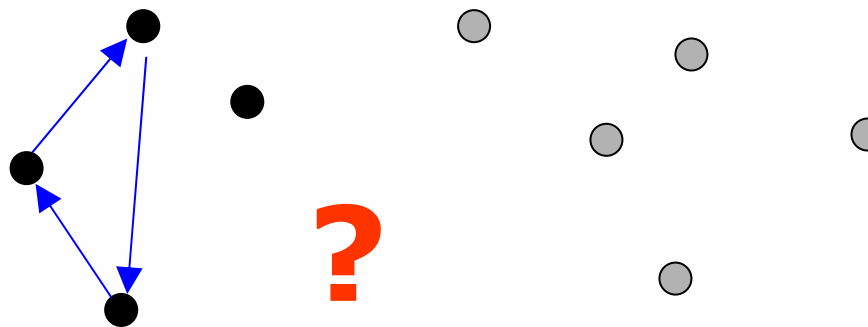


Soluzione incrementale: come aggiungo i punti?

- ❑ Ordiniamo i punti per ascissa crescente nell'insieme P
- ❑ Inizializzo l'involuppo L con i primi tre punti in P (cioè quelli con ascissa più bassa)
- ❑ I punti vengono inseriti nell'involuppo L in modo che seguano il senso orario
- ❑ Ad ogni passo consideriamo il punto successivo in P
 - ▶ Ha ascissa maggiore di tutti i punti presenti in L
 - ▶ Sarà perciò esterno all'involuppo definito da L e dovrà quindi essere aggiunto

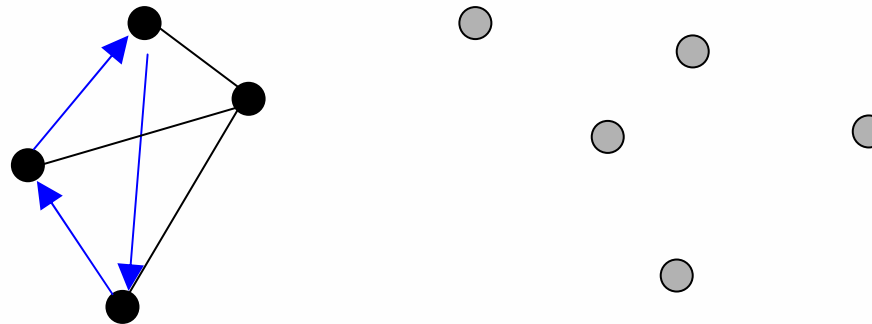


- ❑ Ordiniamo i punti per ascissa crescente nell'insieme P
- ❑ Inizializzo l'involuppo L con i primi tre punti in P (cioè quelli con ascissa più bassa)
- ❑ I punti vengono inseriti nell'involuppo L in modo che seguano il senso orario
- ❑ Ad ogni passo consideriamo il punto successivo in P
 - ▶ Ha ascissa maggiore di tutti i punti presenti in L
 - ▶ Sarà perciò esterno all'involuppo definito da L e dovrà quindi essere aggiunto



- Sia p_i il punto da aggiungere:
 - ▶ tracciamo un segmento $p_i p_j$ per tutti i punti p_j
 - ▶ individuiamo il segmento $p_i p_o$ che segue tutti gli altri in senso orario
 - ▶ individuiamo il segmento $p_i p_a$ che precede tutti gli altri in senso orario
 - ▶ i segmenti $p_i p_o$ e $p_i p_a$ fanno necessariamente parte dell'involuppo e quindi p_i sostituirà tutti i punti in L contenuti fra p_o e p_a in senso orario

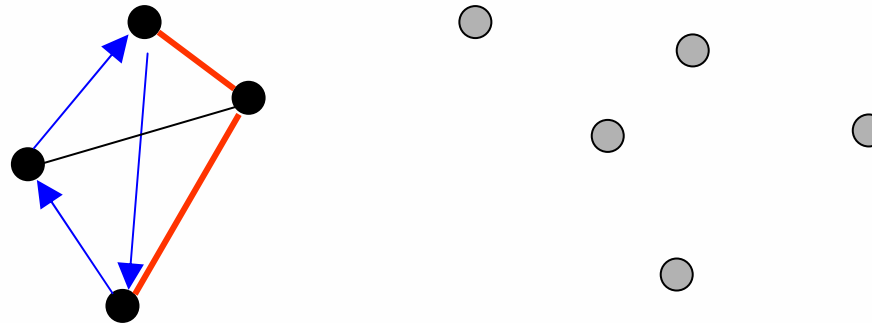
- Sia p_i il punto da aggiungere:
 - ▶ tracciamo un segmento $p_i p_j$ per tutti i punti p_j
 - ▶ individuiamo il segmento $p_i p_o$ che segue tutti gli altri in senso orario
 - ▶ individuiamo il segmento $p_i p_a$ che precede tutti gli altri in senso orario
 - ▶ i segmenti $p_i p_o$ e $p_i p_a$ fanno necessariamente parte dell'involuppo e quindi p_i sostituirà tutti i punti in L contenuti fra p_o e p_a in senso orario



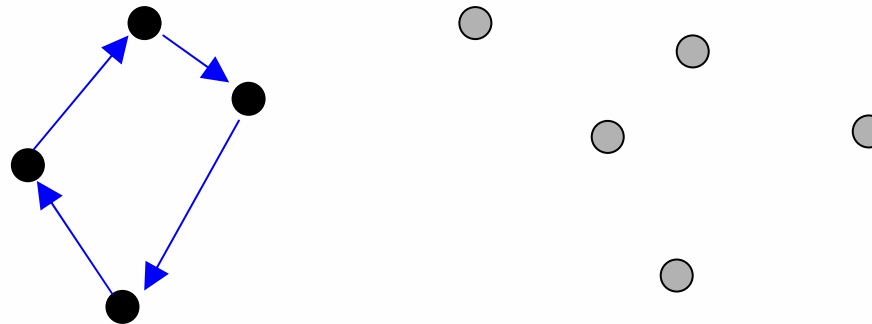
Soluzione incrementale: quali punti rimuovere?

25

- Sia p_i il punto da aggiungere:
 - ▶ tracciamo un segmento $p_i p_j$ per tutti i punti p_j
 - ▶ individuiamo il segmento $p_i p_o$ che segue tutti gli altri in senso orario
 - ▶ individuiamo il segmento $p_i p_a$ che precede tutti gli altri in senso orario
 - ▶ i segmenti $p_i p_o$ e $p_i p_a$ fanno necessariamente parte dell'involuppo e quindi p_i sostituirà tutti i punti in L contenuti fra p_o e p_a in senso orario

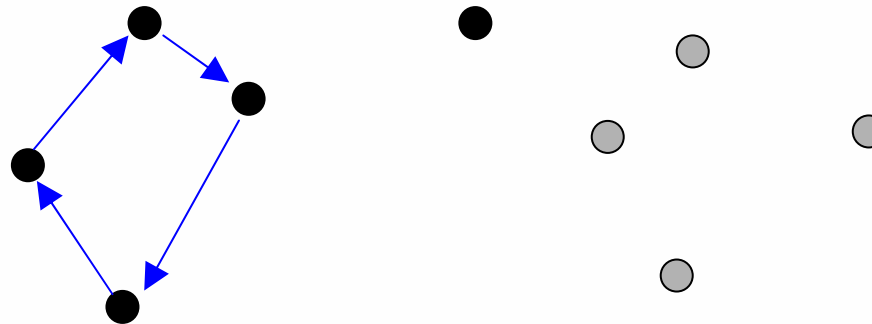


- Sia p_i il punto da aggiungere:
 - ▶ tracciamo un segmento $p_i p_j$ per tutti i punti p_j
 - ▶ individuiamo il segmento $p_i p_o$ che segue tutti gli altri in senso orario
 - ▶ individuiamo il segmento $p_i p_a$ che precede tutti gli altri in senso orario
 - ▶ i segmenti $p_i p_o$ e $p_i p_a$ fanno necessariamente parte dell'involuppo e quindi p_i sostituirà tutti i punti in L contenuti fra p_o e p_a in senso orario



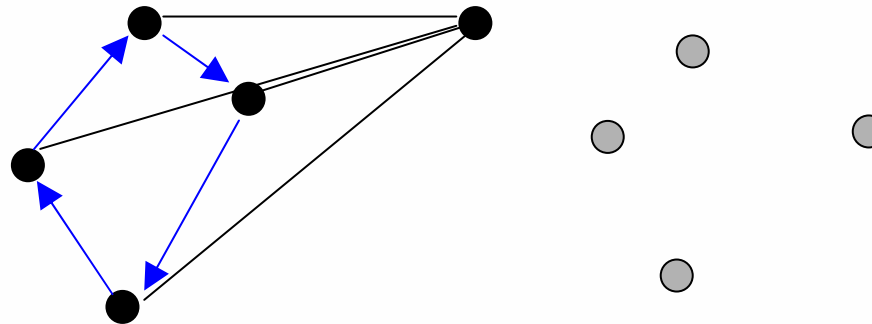
Soluzione incrementale: quali punti rimuovere?

- Sia p_i il punto da aggiungere:
 - ▶ tracciamo un segmento $p_i p_j$ per tutti i punti p_j
 - ▶ individuiamo il segmento $p_i p_o$ che segue tutti gli altri in senso orario
 - ▶ individuiamo il segmento $p_i p_a$ che precede tutti gli altri in senso orario
 - ▶ i segmenti $p_i p_o$ e $p_i p_a$ fanno necessariamente parte dell'involuppo e quindi p_i sostituirà tutti i punti in L contenuti fra p_o e p_a in senso orario



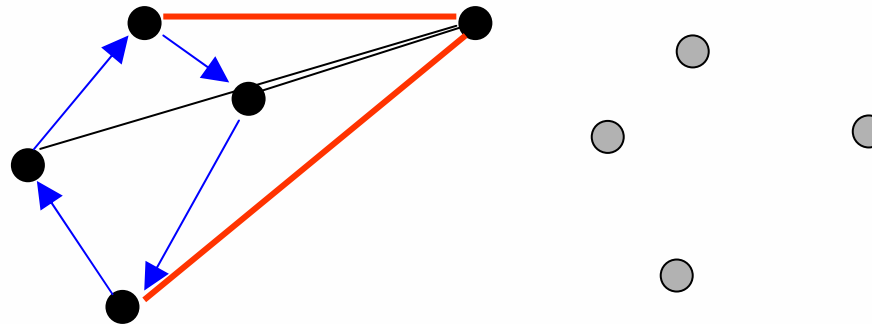
Soluzione incrementale: quali punti rimuovere?

- Sia p_i il punto da aggiungere:
 - ▶ tracciamo un segmento $p_i p_j$ per tutti i punti p_j
 - ▶ individuiamo il segmento $p_i p_o$ che segue tutti gli altri in senso orario
 - ▶ individuiamo il segmento $p_i p_a$ che precede tutti gli altri in senso orario
 - ▶ i segmenti $p_i p_o$ e $p_i p_a$ fanno necessariamente parte dell'involuppo e quindi p_i sostituirà tutti i punti in L contenuti fra p_o e p_a in senso orario



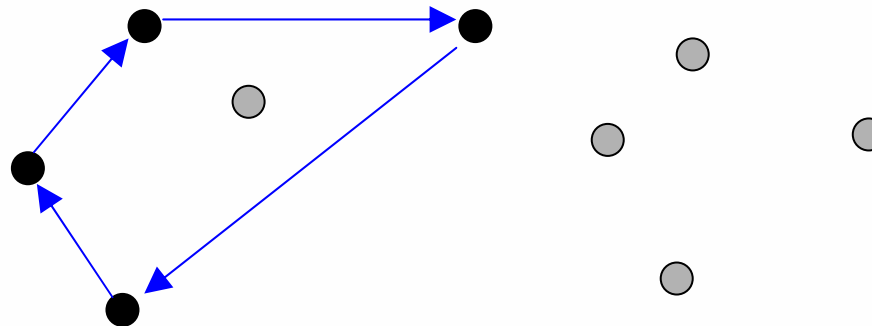
Soluzione incrementale: quali punti rimuovere?

- Sia p_i il punto da aggiungere:
 - ▶ tracciamo un segmento $p_i p_j$ per tutti i punti p_j
 - ▶ individuiamo il segmento $p_i p_o$ che segue tutti gli altri in senso orario
 - ▶ individuiamo il segmento $p_i p_a$ che precede tutti gli altri in senso orario
 - ▶ i segmenti $p_i p_o$ e $p_i p_a$ fanno necessariamente parte dell'involuppo e quindi p_i sostituirà tutti i punti in L contenuti fra p_o e p_a in senso orario



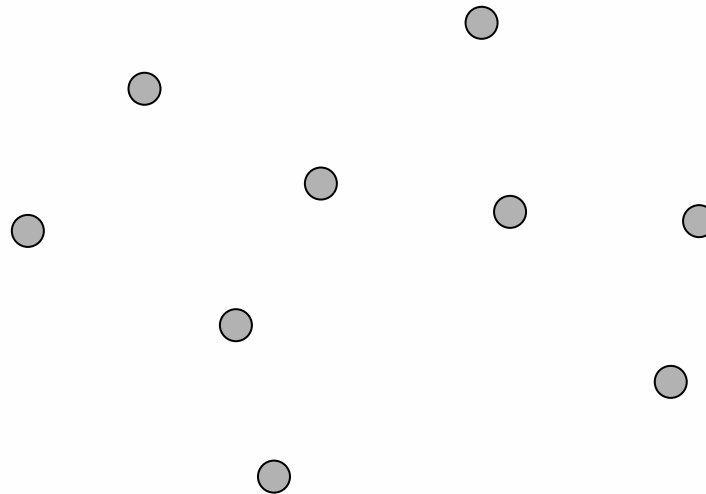
Soluzione incrementale: quali punti rimuovere?

- Sia p_i il punto da aggiungere:
 - ▶ tracciamo un segmento $p_i p_j$ per tutti i punti p_j
 - ▶ individuiamo il segmento $p_i p_o$ che segue tutti gli altri in senso orario
 - ▶ individuiamo il segmento $p_i p_a$ che precede tutti gli altri in senso orario
 - ▶ i segmenti $p_i p_o$ e $p_i p_a$ fanno necessariamente parte dell'involuppo e quindi p_i sostituirà tutti i punti in L contenuti fra p_o e p_a in senso orario

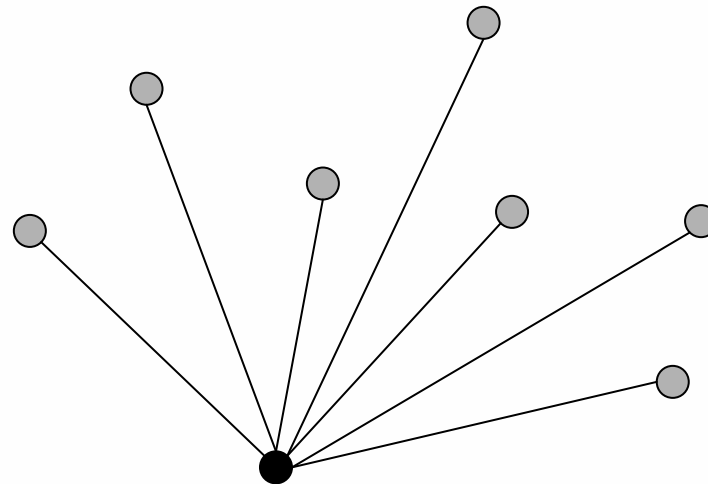


- Sia p_i il punto da aggiungere:
 - ▶ tracciamo un segmento $p_i p_j$ per tutti i punti p_j
 - ▶ individuiamo il segmento $p_i p_o$ che segue tutti gli altri in senso orario
 - ▶ individuiamo il segmento $p_i p_a$ che precede tutti gli altri in senso orario
 - ▶ i segmenti $p_i p_o$ e $p_i p_a$ fanno necessariamente parte dell'involucro e quindi p_i sostituirà tutti i punti in L contenuti fra p_o e p_a in senso orario
- Complessità
 - ▶ $O(n \log n)$ per l'ordinamento iniziale
 - ▶ $O(n^2)$ per la ricerca di tutti i punti da rimuovere
- Si può fare ancora meglio?
 - ▶ Scansione di Graham
 - ▶ Algoritmo di Jarvis

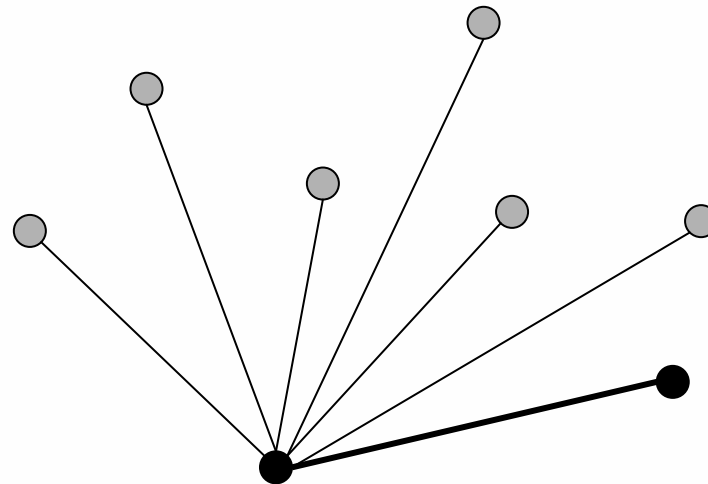
- ❑ Si parte dal punto p_0 con ordinata minima
- ❑ Si calcola l'angolo fra p_0 e tutti gli altri punti rispetto all'asse delle ascisse
- ❑ Si ordina tutti gli altri punti rispetto ad angoli crescenti e si prosegue come segue
 - ▶ Ad ogni passo si aggiunge all'involuppo il prossimo punto in P rispetto all'ordinamento effettuato
 - ▶ Se il segmento aggiunto svolta a sinistra rispetto al precedente si prosegue
 - ▶ Se il segmento aggiunto svolta a destra rispetto al precedente, il punto appena aggiunto e il precedente vengono rimossi e si prosegue dal punto immediatamente successivo



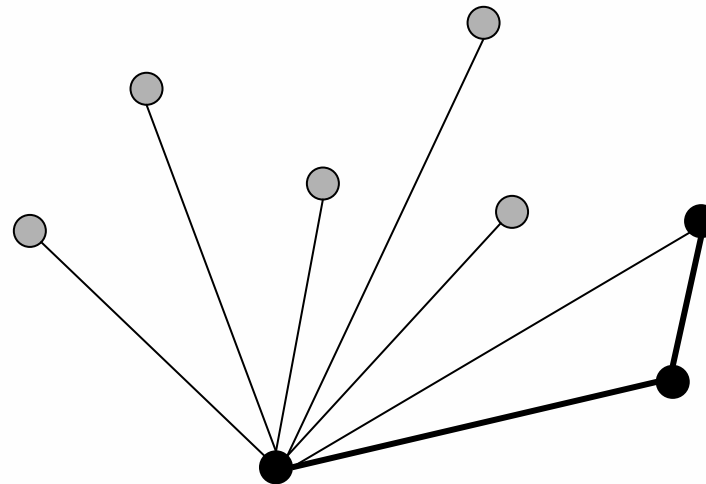
- ❑ Si parte dal punto p_0 con ordinata minima
- ❑ Si calcola l'angolo fra p_0 e tutti gli altri punti rispetto all'asse delle ascisse
- ❑ Si ordina tutti gli altri punti rispetto ad angoli crescenti e si prosegue come segue
 - ▶ Ad ogni passo si aggiunge all'involuppo il prossimo punto in P rispetto all'ordinamento effettuato
 - ▶ Se il segmento aggiunto svolta a sinistra rispetto al precedente si prosegue
 - ▶ Se il segmento aggiunto svolta a destra rispetto al precedente, il punto appena aggiunto e il precedente vengono rimossi e si prosegue dal punto immediatamente successivo



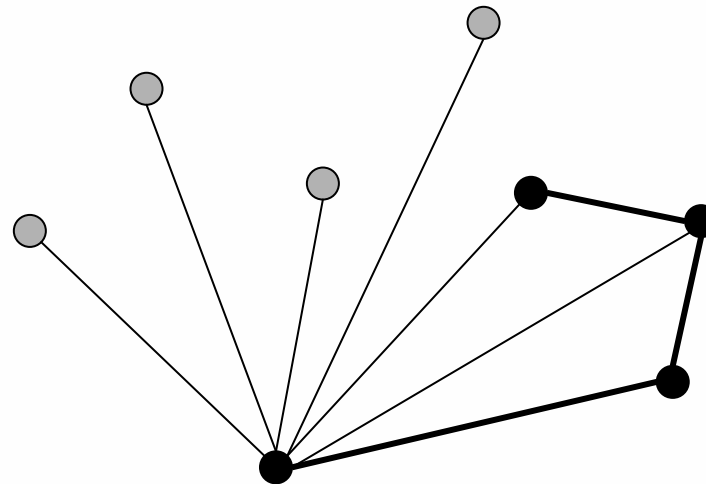
- ❑ Si parte dal punto p_0 con ordinata minima
- ❑ Si calcola l'angolo fra p_0 e tutti gli altri punti rispetto all'asse delle ascisse
- ❑ Si ordina tutti gli altri punti rispetto ad angoli crescenti e si prosegue come segue
 - ▶ Ad ogni passo si aggiunge all'involuppo il prossimo punto in P rispetto all'ordinamento effettuato
 - ▶ Se il segmento aggiunto svolta a sinistra rispetto al precedente si prosegue
 - ▶ Se il segmento aggiunto svolta a destra rispetto al precedente, il punto appena aggiunto e il precedente vengono rimossi e si prosegue dal punto immediatamente successivo



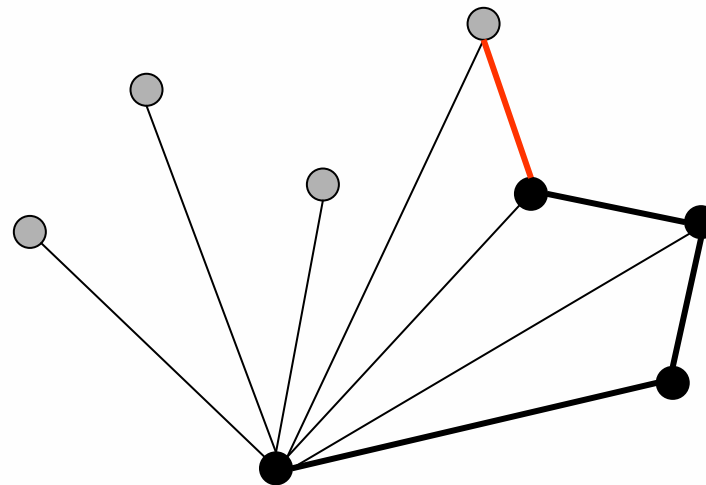
- ❑ Si parte dal punto p_0 con ordinata minima
- ❑ Si calcola l'angolo fra p_0 e tutti gli altri punti rispetto all'asse delle ascisse
- ❑ Si ordina tutti gli altri punti rispetto ad angoli crescenti e si prosegue come segue
 - ▶ Ad ogni passo si aggiunge all'involuppo il prossimo punto in P rispetto all'ordinamento effettuato
 - ▶ Se il segmento aggiunto svolta a sinistra rispetto al precedente si prosegue
 - ▶ Se il segmento aggiunto svolta a destra rispetto al precedente, il punto appena aggiunto e il precedente vengono rimossi e si prosegue dal punto immediatamente successivo



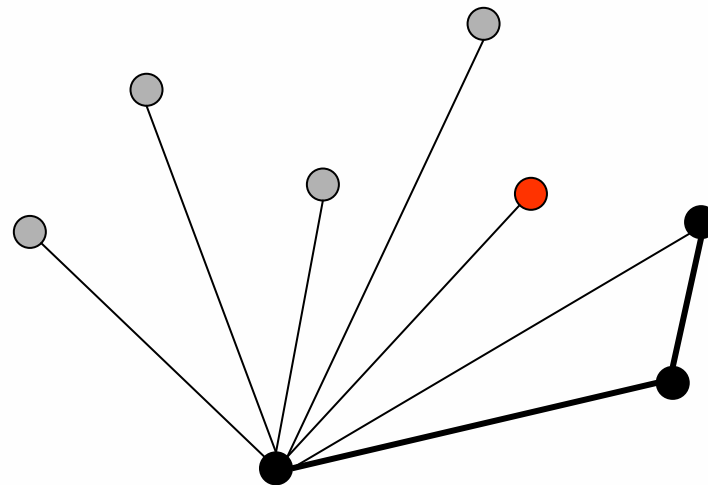
- ❑ Si parte dal punto p_0 con ordinata minima
- ❑ Si calcola l'angolo fra p_0 e tutti gli altri punti rispetto all'asse delle ascisse
- ❑ Si ordina tutti gli altri punti rispetto ad angoli crescenti e si prosegue come segue
 - ▶ Ad ogni passo si aggiunge all'involuppo il prossimo punto in P rispetto all'ordinamento effettuato
 - ▶ Se il segmento aggiunto svolta a sinistra rispetto al precedente si prosegue
 - ▶ Se il segmento aggiunto svolta a destra rispetto al precedente, il punto appena aggiunto e il precedente vengono rimossi e si prosegue dal punto immediatamente successivo



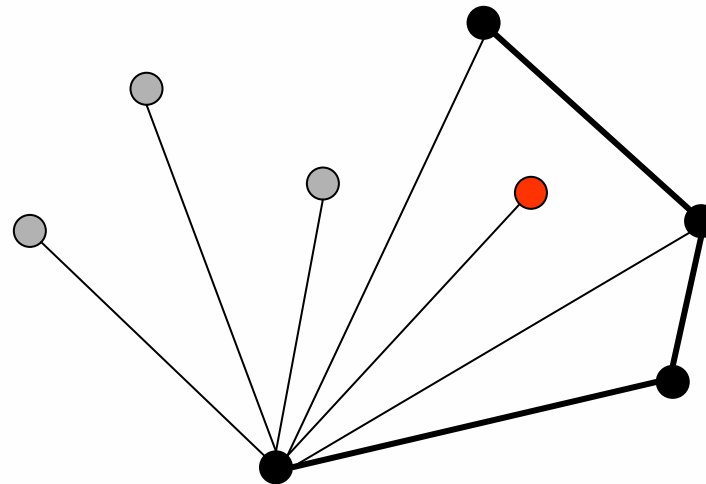
- ❑ Si parte dal punto p_0 con ordinata minima
- ❑ Si calcola l'angolo fra p_0 e tutti gli altri punti rispetto all'asse delle ascisse
- ❑ Si ordina tutti gli altri punti rispetto ad angoli crescenti e si prosegue come segue
 - ▶ Ad ogni passo si aggiunge all'involuppo il prossimo punto in P rispetto all'ordinamento effettuato
 - ▶ Se il segmento aggiunto svolta a sinistra rispetto al precedente si prosegue
 - ▶ Se il segmento aggiunto svolta a destra rispetto al precedente, il punto appena aggiunto e il precedente vengono rimossi e si prosegue dal punto immediatamente successivo



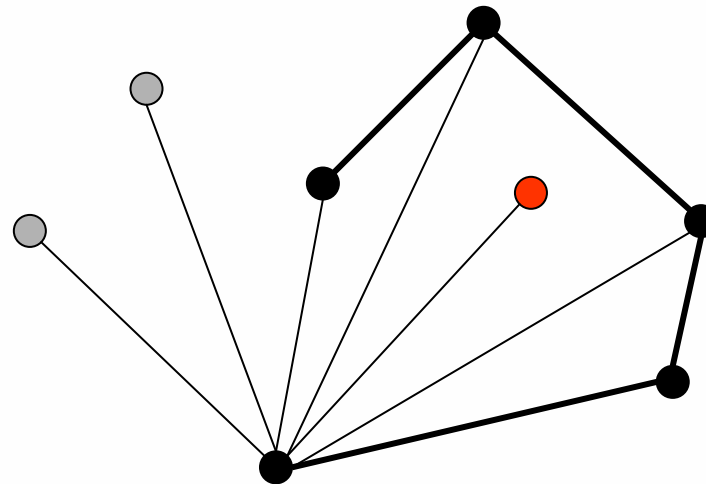
- ❑ Si parte dal punto p_0 con ordinata minima
- ❑ Si calcola l'angolo fra p_0 e tutti gli altri punti rispetto all'asse delle ascisse
- ❑ Si ordina tutti gli altri punti rispetto ad angoli crescenti e si prosegue come segue
 - ▶ Ad ogni passo si aggiunge all'involuppo il prossimo punto in P rispetto all'ordinamento effettuato
 - ▶ Se il segmento aggiunto svolta a sinistra rispetto al precedente si prosegue
 - ▶ Se il segmento aggiunto svolta a destra rispetto al precedente, il punto appena aggiunto e il precedente vengono rimossi e si prosegue dal punto immediatamente successivo



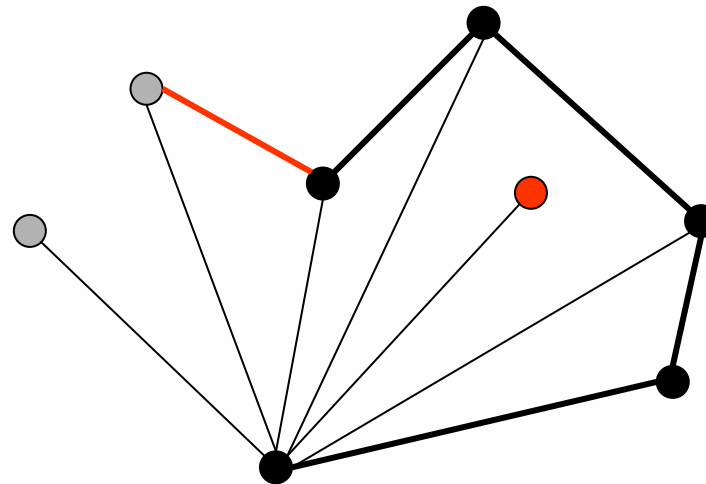
- ❑ Si parte dal punto p_0 con ordinata minima
- ❑ Si calcola l'angolo fra p_0 e tutti gli altri punti rispetto all'asse delle ascisse
- ❑ Si ordina tutti gli altri punti rispetto ad angoli crescenti e si prosegue come segue
 - ▶ Ad ogni passo si aggiunge all'involuppo il prossimo punto in P rispetto all'ordinamento effettuato
 - ▶ Se il segmento aggiunto svolta a sinistra rispetto al precedente si prosegue
 - ▶ Se il segmento aggiunto svolta a destra rispetto al precedente, il punto appena aggiunto e il precedente vengono rimossi e si prosegue dal punto immediatamente successivo



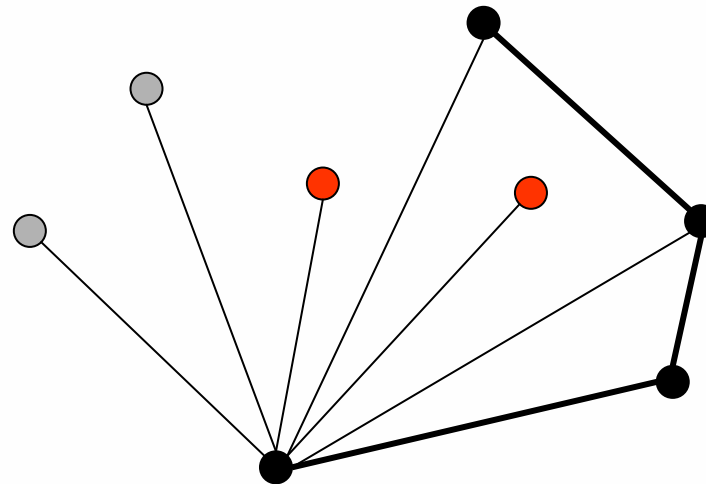
- ❑ Si parte dal punto p_0 con ordinata minima
- ❑ Si calcola l'angolo fra p_0 e tutti gli altri punti rispetto all'asse delle ascisse
- ❑ Si ordina tutti gli altri punti rispetto ad angoli crescenti e si prosegue come segue
 - ▶ Ad ogni passo si aggiunge all'involuppo il prossimo punto in P rispetto all'ordinamento effettuato
 - ▶ Se il segmento aggiunto svolta a sinistra rispetto al precedente si prosegue
 - ▶ Se il segmento aggiunto svolta a destra rispetto al precedente, il punto appena aggiunto e il precedente vengono rimossi e si prosegue dal punto immediatamente successivo



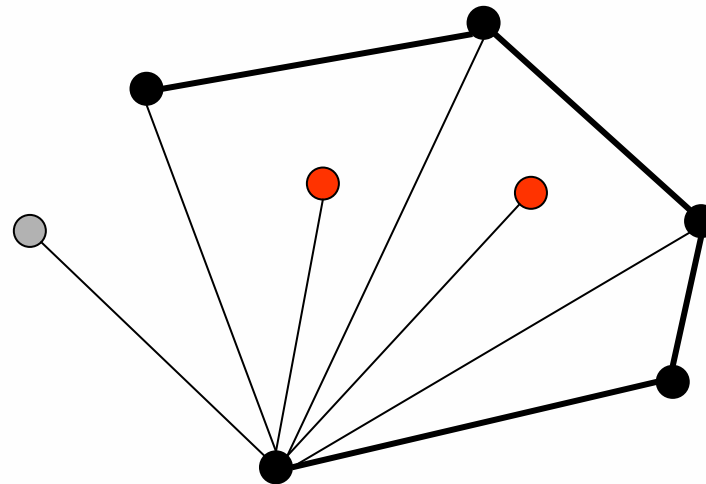
- ❑ Si parte dal punto p_0 con ordinata minima
- ❑ Si calcola l'angolo fra p_0 e tutti gli altri punti rispetto all'asse delle ascisse
- ❑ Si ordina tutti gli altri punti rispetto ad angoli crescenti e si prosegue come segue
 - ▶ Ad ogni passo si aggiunge all'involuppo il prossimo punto in P rispetto all'ordinamento effettuato
 - ▶ Se il segmento aggiunto svolta a sinistra rispetto al precedente si prosegue
 - ▶ Se il segmento aggiunto svolta a destra rispetto al precedente, il punto appena aggiunto e il precedente vengono rimossi e si prosegue dal punto immediatamente successivo



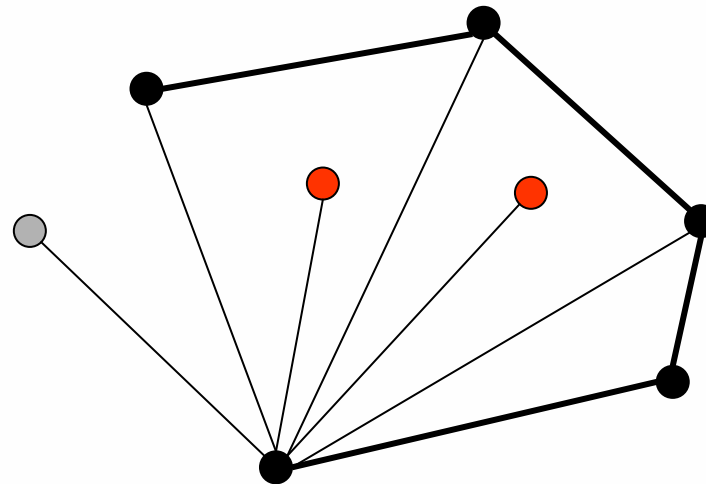
- ❑ Si parte dal punto p_0 con ordinata minima
- ❑ Si calcola l'angolo fra p_0 e tutti gli altri punti rispetto all'asse delle ascisse
- ❑ Si ordina tutti gli altri punti rispetto ad angoli crescenti e si prosegue come segue
 - ▶ Ad ogni passo si aggiunge all'involuppo il prossimo punto in P rispetto all'ordinamento effettuato
 - ▶ Se il segmento aggiunto svolta a sinistra rispetto al precedente si prosegue
 - ▶ Se il segmento aggiunto svolta a destra rispetto al precedente, il punto appena aggiunto e il precedente vengono rimossi e si prosegue dal punto immediatamente successivo



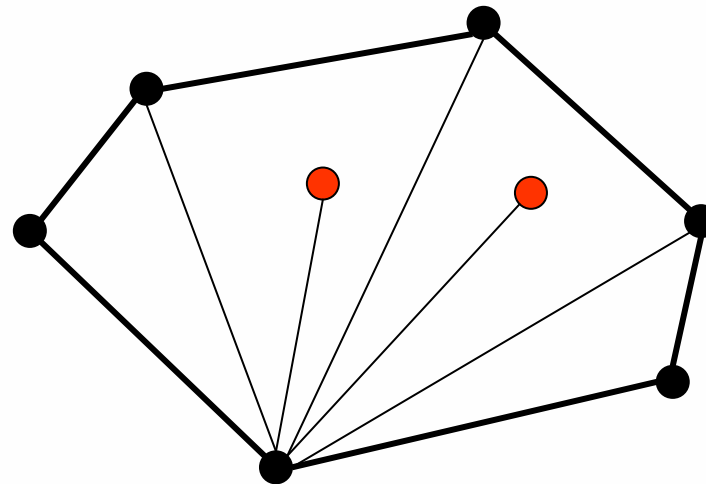
- ❑ Si parte dal punto p_0 con ordinata minima
- ❑ Si calcola l'angolo fra p_0 e tutti gli altri punti rispetto all'asse delle ascisse
- ❑ Si ordina tutti gli altri punti rispetto ad angoli crescenti e si prosegue come segue
 - ▶ Ad ogni passo si aggiunge all'involuppo il prossimo punto in P rispetto all'ordinamento effettuato
 - ▶ Se il segmento aggiunto svolta a sinistra rispetto al precedente si prosegue
 - ▶ Se il segmento aggiunto svolta a destra rispetto al precedente, il punto appena aggiunto e il precedente vengono rimossi e si prosegue dal punto immediatamente successivo



- ❑ Si parte dal punto p_0 con ordinata minima
- ❑ Si calcola l'angolo fra p_0 e tutti gli altri punti rispetto all'asse delle ascisse
- ❑ Si ordina tutti gli altri punti rispetto ad angoli crescenti e si prosegue come segue
 - ▶ Ad ogni passo si aggiunge all'involuppo il prossimo punto in P rispetto all'ordinamento effettuato
 - ▶ Se il segmento aggiunto svolta a sinistra rispetto al precedente si prosegue
 - ▶ Se il segmento aggiunto svolta a destra rispetto al precedente, il punto appena aggiunto e il precedente vengono rimossi e si prosegue dal punto immediatamente successivo

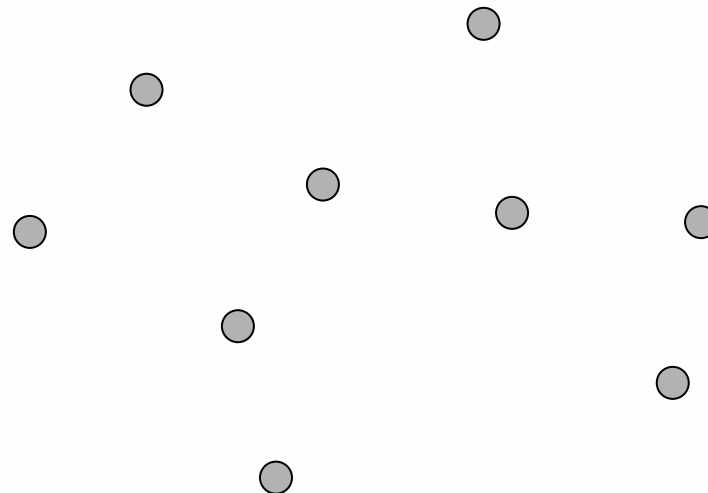


- ❑ Si parte dal punto p_0 con ordinata minima
- ❑ Si calcola l'angolo fra p_0 e tutti gli altri punti rispetto all'asse delle ascisse
- ❑ Si ordina tutti gli altri punti rispetto ad angoli crescenti e si prosegue come segue
 - ▶ Ad ogni passo si aggiunge all'involuppo il prossimo punto in P rispetto all'ordinamento effettuato
 - ▶ Se il segmento aggiunto svolta a sinistra rispetto al precedente si prosegue
 - ▶ Se il segmento aggiunto svolta a destra rispetto al precedente, il punto appena aggiunto e il precedente vengono rimossi e si prosegue dal punto immediatamente successivo

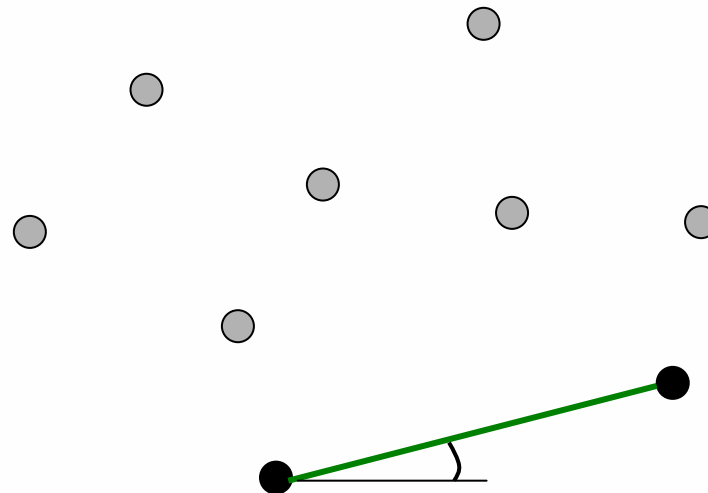


Costo: $O(n \log n)$

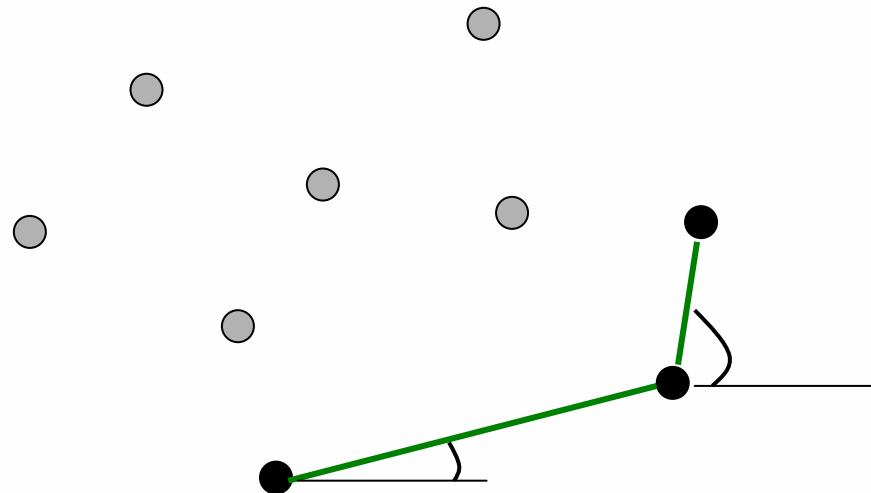
- ❑ Si parte dal punto p_0 con ordinata minima
- ❑ Ad ogni iterazione
 - ▶ viene aggiunto all'involuppo il segmento $p_i p_j$ tale da formare il minore angolo con l'asse positivo delle ascisse
 - ▶ si prosegue allo stesso modo finche viene raggiunto il punto con ordinata maggiore
 - ▶ Raggiunto tale punto, si aggiunge ad ogni iterazione il segmento $p_i p_j$ tale da formare il minore angolo con l'asse negativo delle ascisse



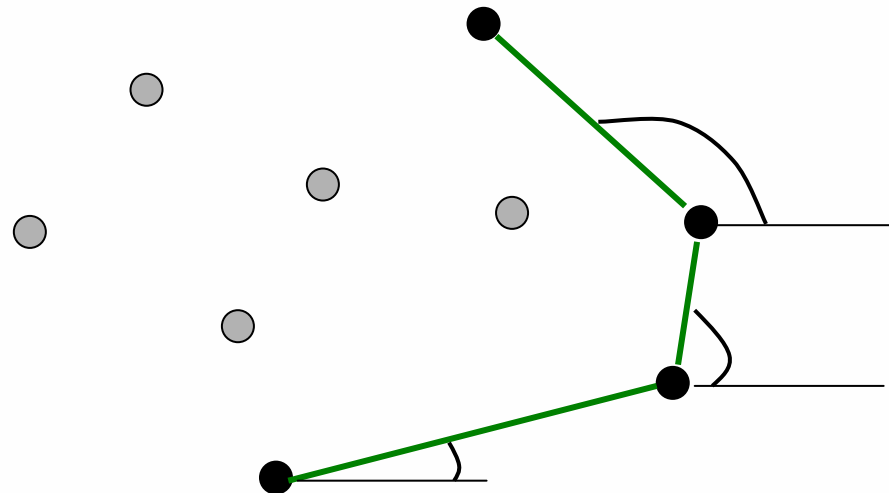
- ❑ Si parte dal punto p_0 con ordinata minima
- ❑ Ad ogni iterazione
 - ▶ viene aggiunto all'involuppo il segmento $p_i p_j$ tale da formare il minore angolo con l'asse positivo delle ascisse
 - ▶ si prosegue allo stesso modo finche viene raggiunto il punto con ordinata maggiore
 - ▶ Raggiunto tale punto, si aggiunge ad ogni iterazione il segmento $p_i p_j$ tale da formare il minore angolo con l'asse negativo delle ascisse



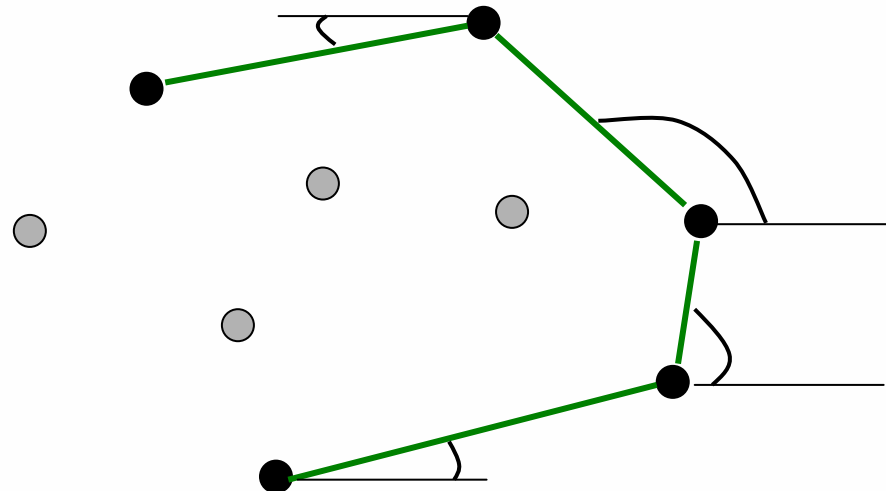
- ❑ Si parte dal punto p_0 con ordinata minima
- ❑ Ad ogni iterazione
 - ▶ viene aggiunto all'involuppo il segmento $p_i p_j$ tale da formare il minore angolo con l'asse positivo delle ascisse
 - ▶ si prosegue allo stesso modo finché viene raggiunto il punto con ordinata maggiore
 - ▶ Raggiunto tale punto, si aggiunge ad ogni iterazione il segmento $p_i p_j$ tale da formare il minore angolo con l'asse negativo delle ascisse



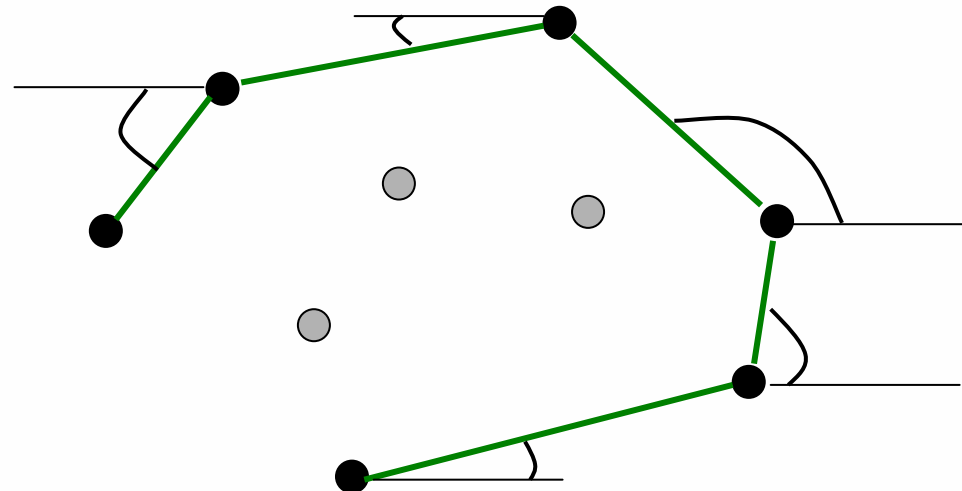
- ❑ Si parte dal punto p_0 con ordinata minima
- ❑ Ad ogni iterazione
 - ▶ viene aggiunto all'involuppo il segmento $p_i p_j$ tale da formare il minore angolo con l'asse positivo delle ascisse
 - ▶ si prosegue allo stesso modo finché viene raggiunto il punto con ordinata maggiore
 - ▶ Raggiunto tale punto, si aggiunge ad ogni iterazione il segmento $p_i p_j$ tale da formare il minore angolo con l'asse negativo delle ascisse



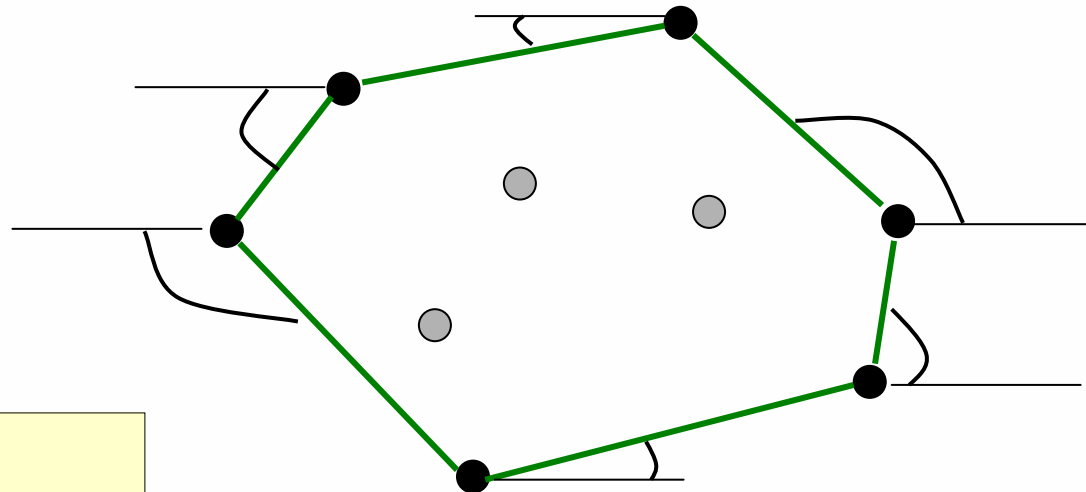
- ❑ Si parte dal punto p_0 con ordinata minima
- ❑ Ad ogni iterazione
 - ▶ viene aggiunto all'involuppo il segmento $p_i p_j$ tale da formare il minore angolo con l'asse positivo delle ascisse
 - ▶ si prosegue allo stesso modo finche viene raggiunto il punto con ordinata maggiore
 - ▶ Raggiunto tale punto, si aggiunge ad ogni iterazione il segmento $p_i p_j$ tale da formare il minore angolo con l'asse negativo delle ascisse



- ❑ Si parte dal punto p_0 con ordinata minima
- ❑ Ad ogni iterazione
 - ▶ viene aggiunto all'involuppo il segmento $p_i p_j$ tale da formare il minore angolo con l'asse positivo delle ascisse
 - ▶ si prosegue allo stesso modo finche viene raggiunto il punto con ordinata maggiore
 - ▶ Raggiunto tale punto, si aggiunge ad ogni iterazione il segmento $p_i p_j$ tale da formare il minore angolo con l'asse negativo delle ascisse



- ❑ Si parte dal punto p_0 con ordinata minima
- ❑ Ad ogni iterazione
 - ▶ viene aggiunto all'involucro il segmento $p_i p_j$ tale da formare il minore angolo con l'asse positivo delle ascisse
 - ▶ si prosegue allo stesso modo finché viene raggiunto il punto con ordinata maggiore
 - ▶ Raggiunto tale punto, si aggiunge ad ogni iterazione il segmento $p_i p_j$ tale da formare il minore angolo con l'asse negativo delle ascisse

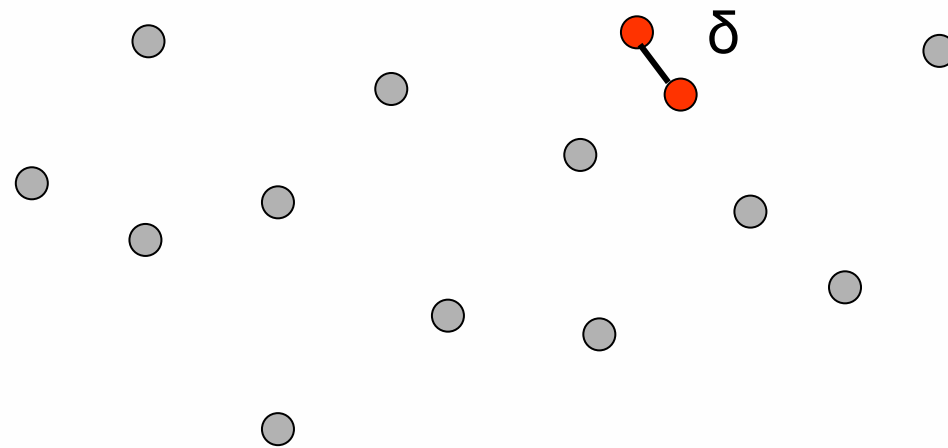


Costo: $O(nh)$

[h numero di vertici]

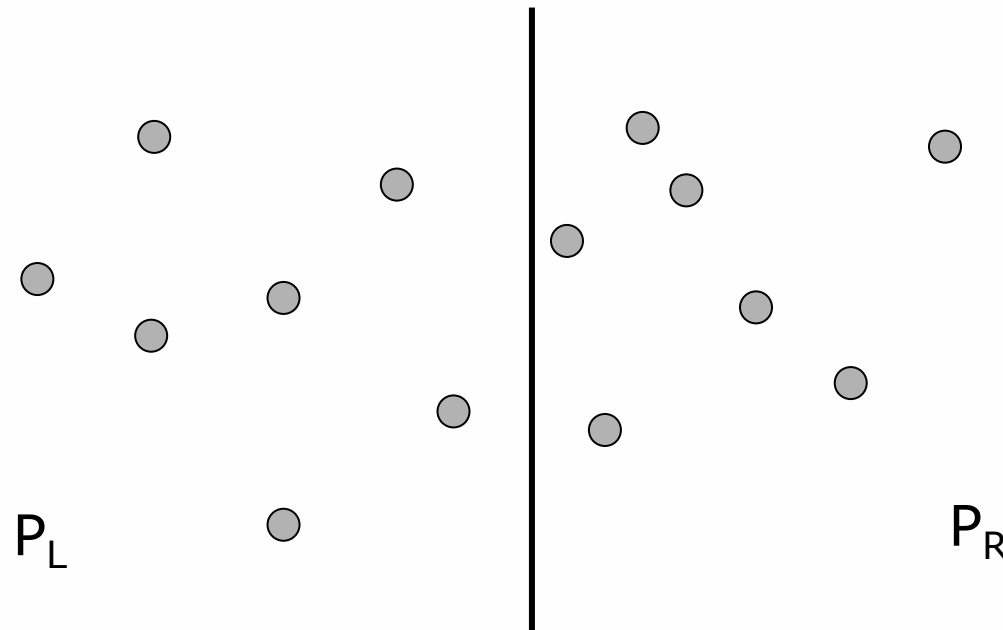
Coppia di punti più vicini

- Dato un insieme di n punti in uno spazio 2D, qual'è la coppia di punti più vicina fra loro? E quanto distano fra di loro?

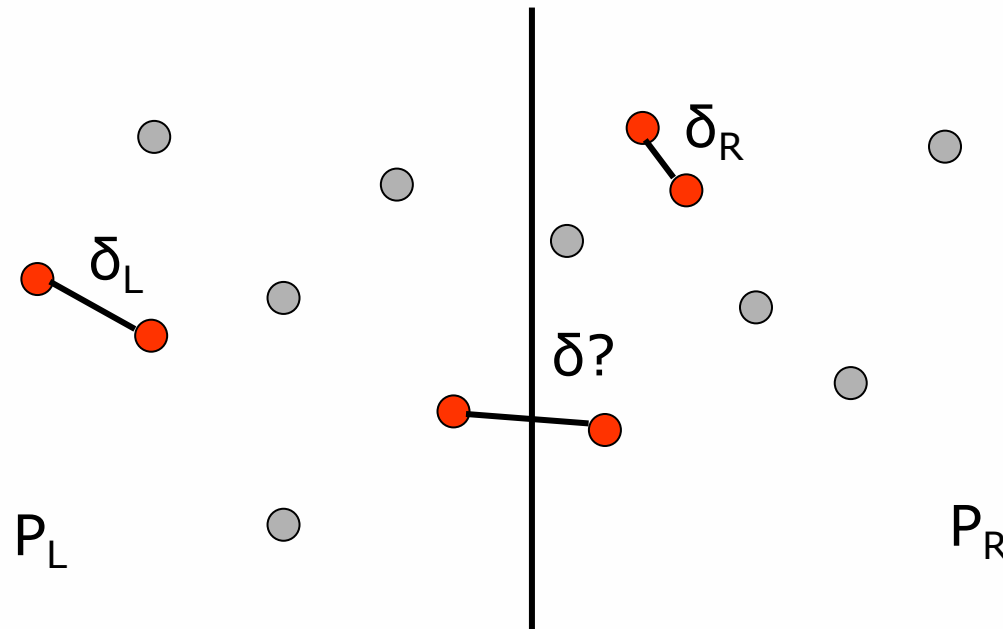


- L'approccio a forza bruta richiede $n(n-1)/2$ confronti ed ha perciò costo pari ad $O(n^2)$
- Possiamo fare di meglio?

- Ordiniamo i punti secondo le loro ascisse e dividiamo con una linea verticale il set di punti in due subset di uguale dimensione

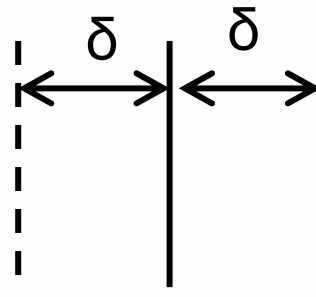


- Ordiniamo i punti secondo le loro ascisse e dividiamo con una lineare verticale il set di punti in due subset di uguale dimensione

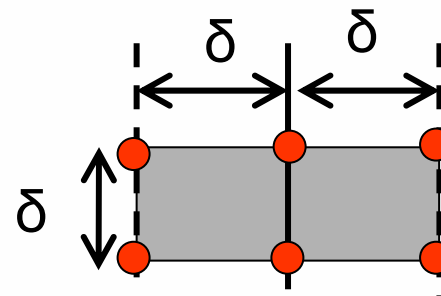


- I punti più vicini sono individuati da uno dei seguenti tre casi:
 - ▶ La coppia di punti più vicini in P_L
 - ▶ La coppia di punti più vicini in P_R
 - ▶ Una coppia di punti a cavallo fra P_L e P_R

- ❑ La coppia di punti più vicina in P_L e P_R si ottiene risolvendo ricorsivamente i due sottoproblemi
- ❑ Per individuare invece una coppia di punti a cavallo fra P_L e P_R è possibile fare le seguenti osservazioni
 - ▶ Sia $\delta = \min(\delta_L, \delta_R)$ allora le possibili soluzioni si trovano vicino alla linea che divide i due sottoproblemi:



- ▶ Inoltre in un rettangolo di dimensione $2\delta \times \delta$ ci possono essere al massimo 8 punti



- ❑ Possiamo allora risolvere il problema di trovare i due punti più vicini in P :
 1. risolvere il sottoproblema P_L
 2. risolvere il sottoproblema P_R
 3. cercare fra i punti distanti non più di δ dalla linea di divisione se c'è una coppia di punti più vicina
- ❑ Il punto 3 può essere risolto in maniera efficace ordinando i punti per le ordinate e considerando per ogni punto solo i successivi 7 punti
- ❑ **Complessità**
 - ▶ L'algoritmo ha complessità $O(n \log^2 n)$
 - ▶ Se implementato in maniera opportuna, costruendo ricorsivamente anche l'ordinamento dei punti rispetto alle ordinate, l'algoritmo ha complessità $O(n \log n)$