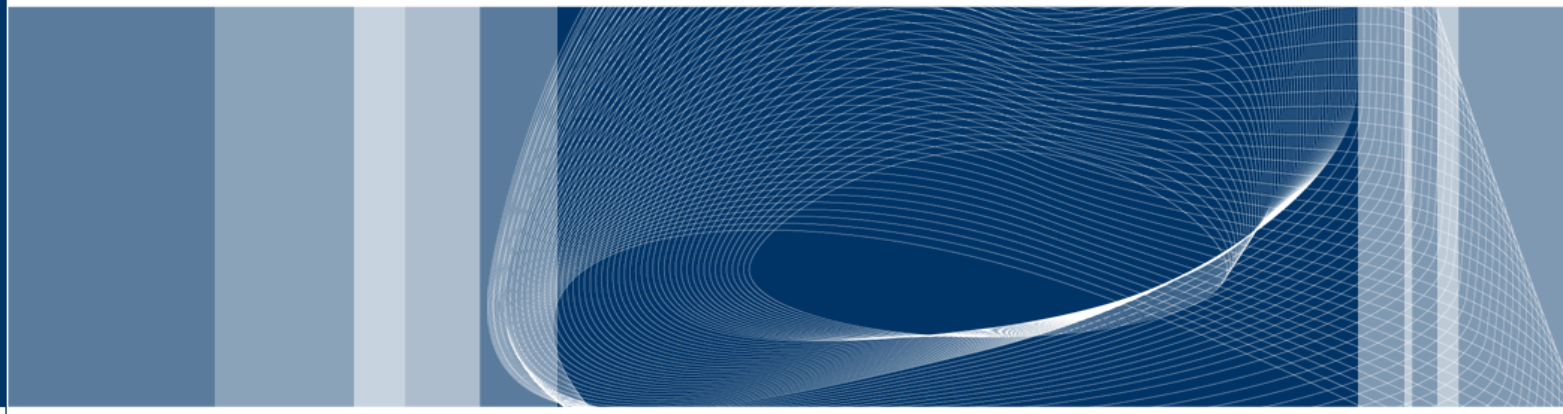
POLITECNICO DI MILANO



Grafi

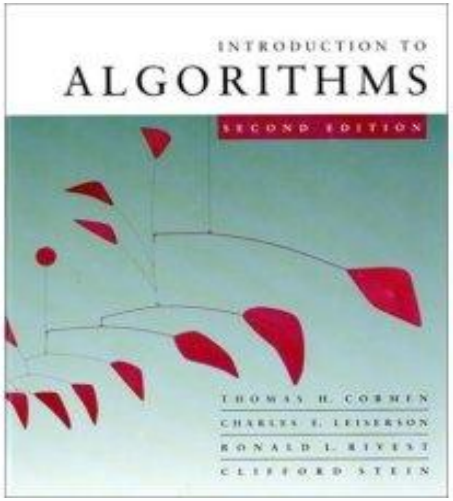
Algoritmi, Strutture Dati e Calcolo Parallelo

Daniele Loiacono

Riferimenti

- Questo materiale è tratto dalle trasparenze del corso "Algoritmi e Strutture Dati" del prof. Alberto Montresor dell'Università di Trento. (http://www.dit.unitn.it/~montreso/asd/index.shtml)

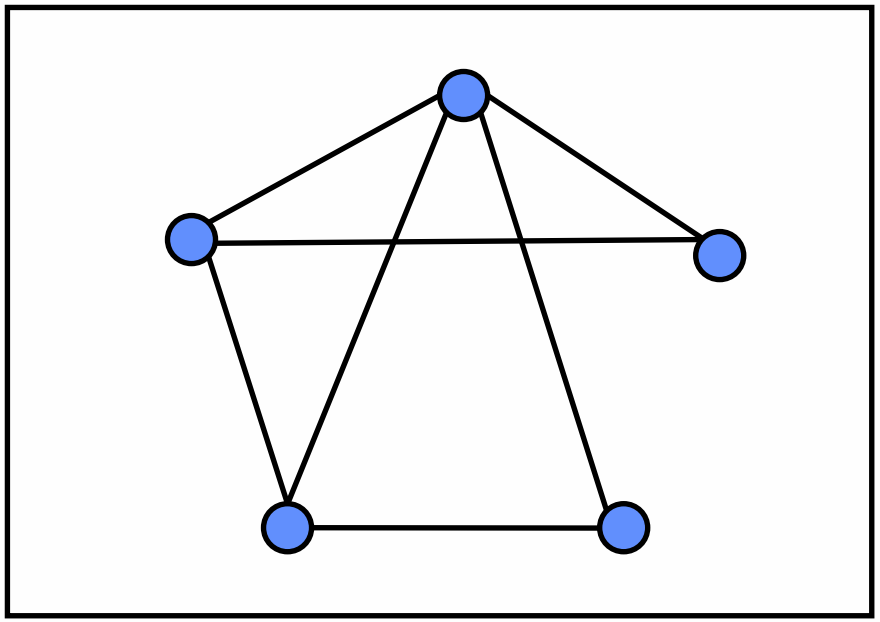
- T.H. Cormen, C.E. Leiserson, R.L. Rivest, C. Stein Introduction to Algorithms, Second Edition

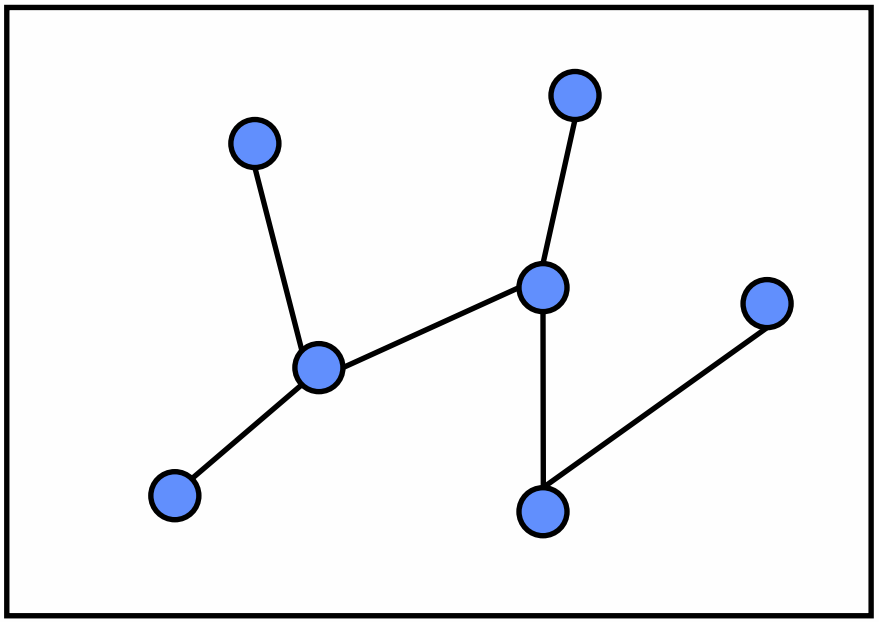


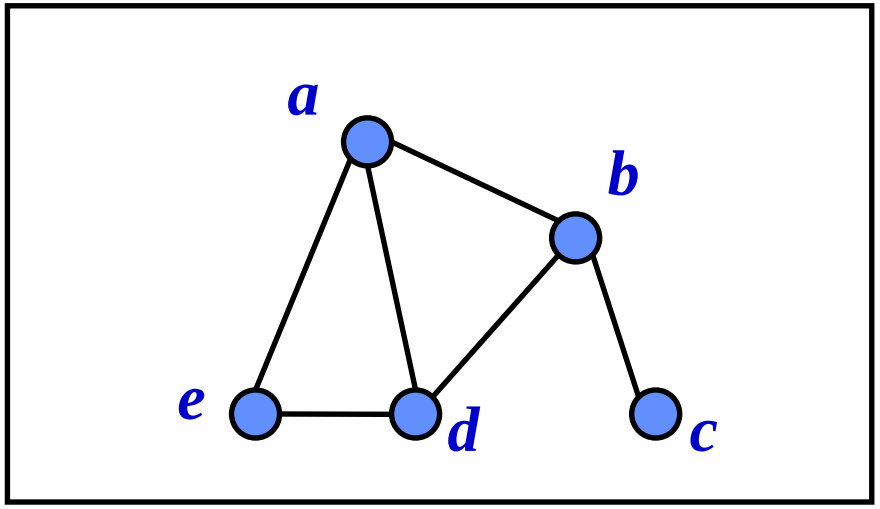
- Queste trasparenze sono disponibili su http://dei.polimi.it/upload/loiacono

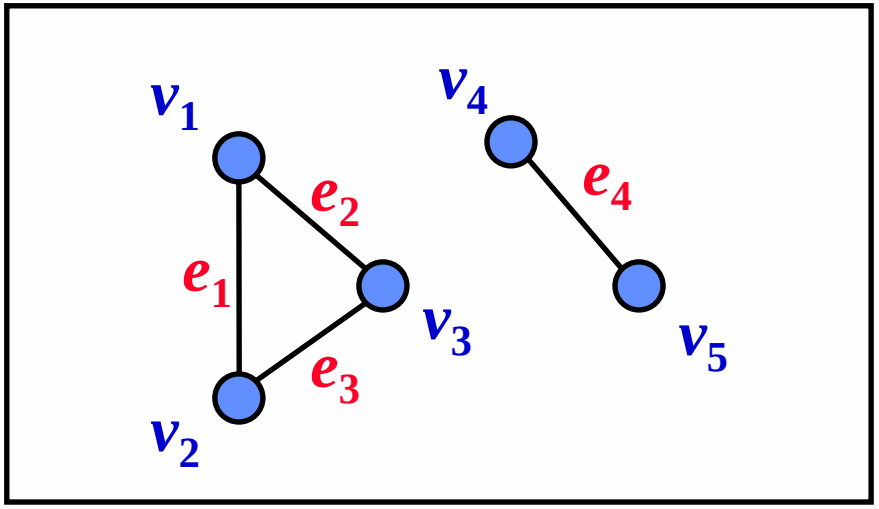
-

Cos'è un grafo?







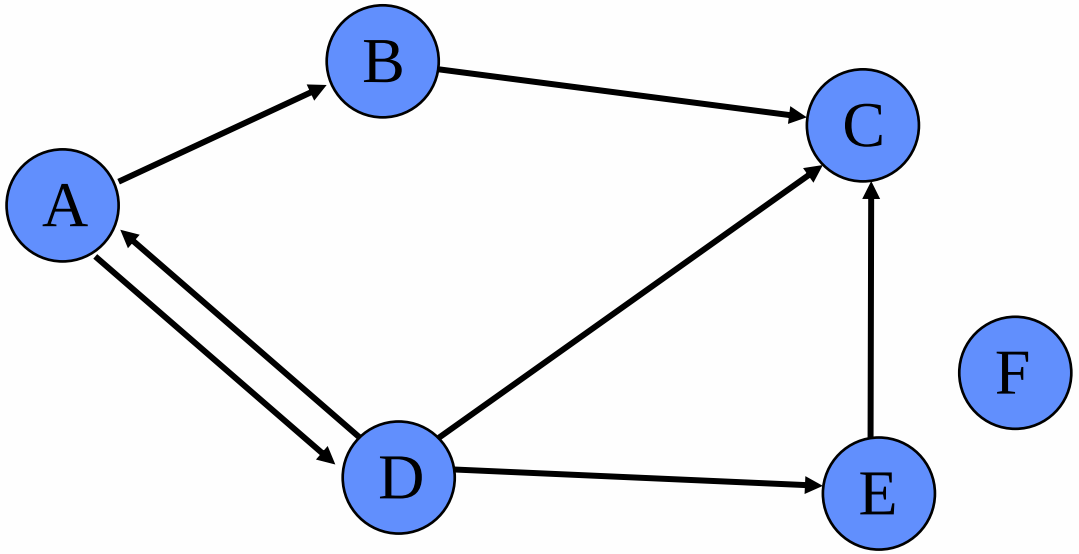


Problemi tipici sui grafi

- Visite
  - Visite in ampiezza (cammini minimi singola sorgente)
  - Visite in profondità (ordinamento topologico, componenti fortemente connesse)
- Cammini minimi
  - Da singola sorgente
  - Fra tutte le coppie di vertici
- Alberi di connessione minimi
- Problemi di flusso
- ....

Definizioni

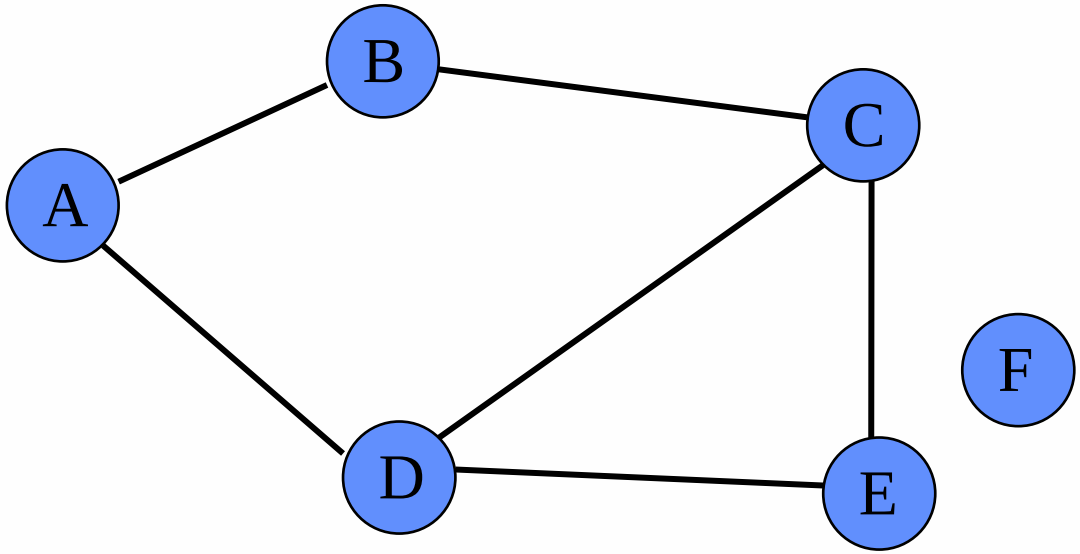
- Un grafo orientato G è definito dalla coppia (V, E) dove:
  - V è l'insieme finito dei vertici
  - E è l'insieme degli archi (relazione binaria in V)



V = {A, B, C, D, E, F}
E = { (A,B), (A,D),(B,C),(D,C),(E,C), (D,E),(D,A) }

Grafi non orientati

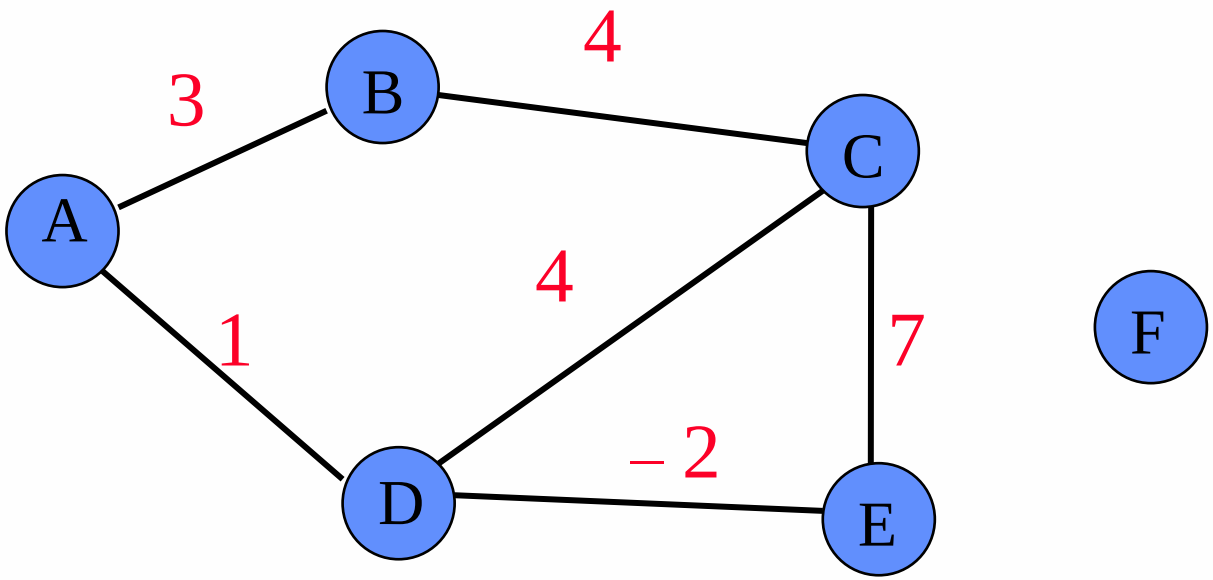
- Un grafo non orientato G è definito dalla coppia (V, E) dove:
  - V è l'insieme finito dei vertici
  - E è l'insieme degli archi (coppie ordinate di elementi di V)



$V = \{A, B, C, D, E, F\}$
$E = \{ (A,B), (A,D), (B,C), (C,D),(C,E),(D,E) \}$

Grafo pesato

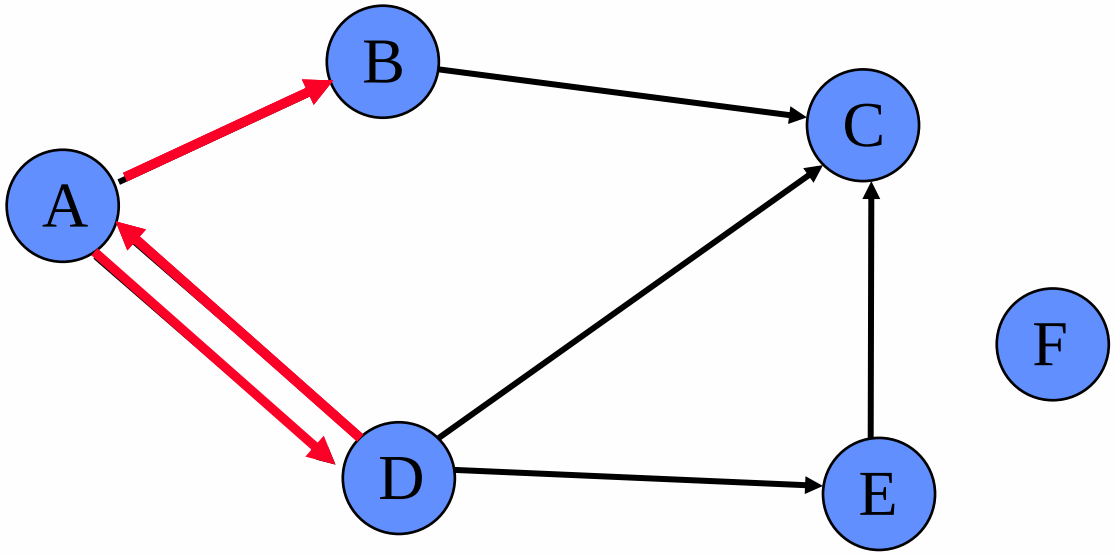
- In alcuni casi ogni arco ha un *peso* (o *costo*) associato
- Il costo può essere determinato tramite una funzione di costo c: E → R, dove *R* è l'insieme dei numeri reali
- Quando tra due vertici non esiste un arco, si dice che il costo è infinito



Esempio: $c(C,F) = \infty$

Incidenza e adiacenza

- In un grafo orientato, un arco (v,w) si dice incidente da v in w
- Un vertice w si dice adiacente a v se e solo se (v, w) ∈ E
- In un grafo non orientato la relazione di adiacenza tra vertici è simmetrica

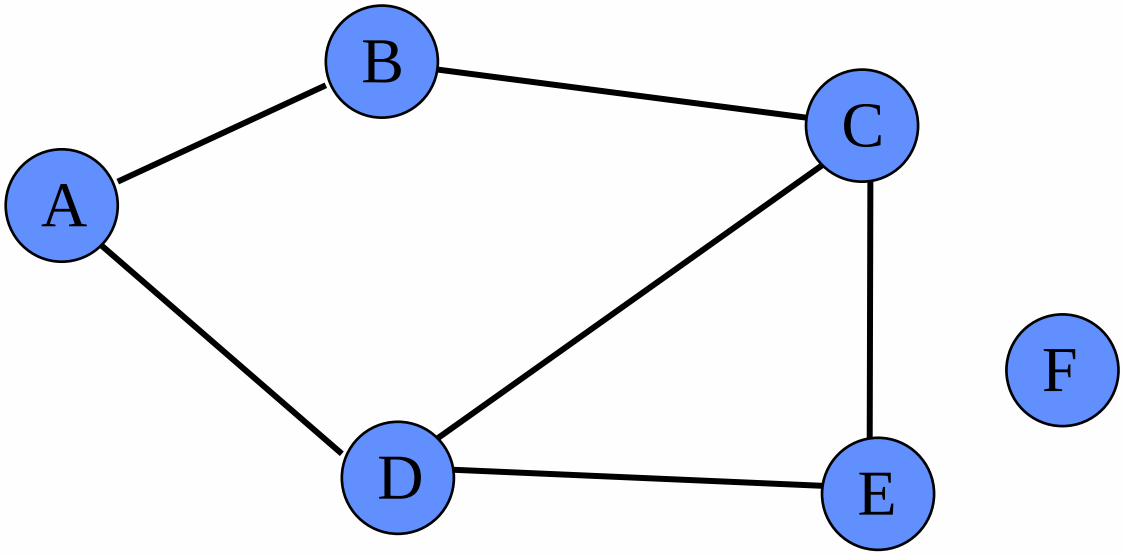


(A,B) è incidente da A a B
(A,D) è incidente da A a D
(D,A) è incidente da D a A

B è adiacente ad A
C è adiacente a B, D, E
A è adiacente a D e viceversa
B non è adiacente a D,C
F non è adiacente ad alcun vertice

Grado in un grafo non orientato

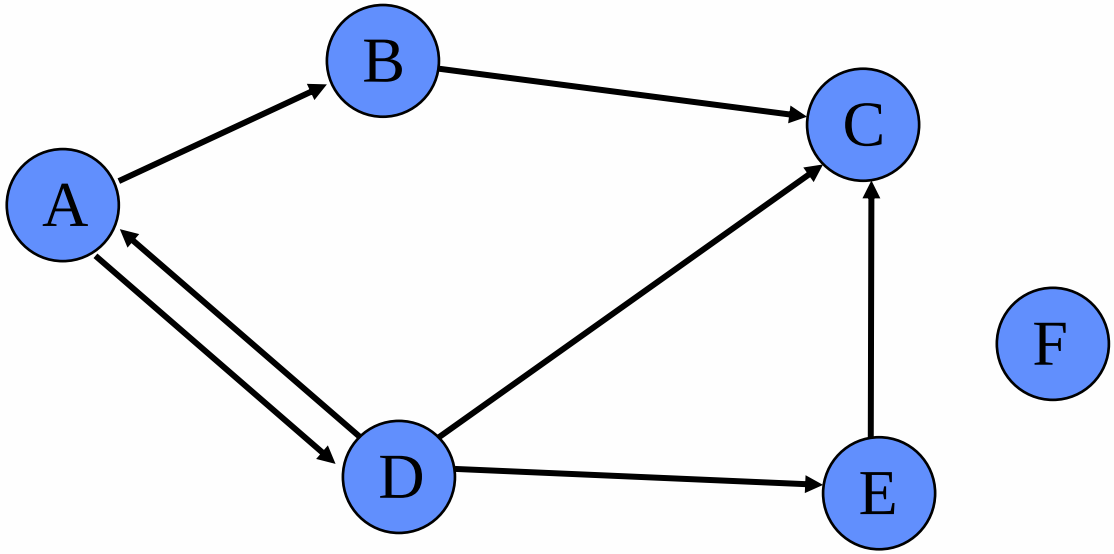
- In un grafo non orientato, il grado di un vertice è il numero di archi che da esso si dipartono



A, *B* ed *E* hanno *grado* 2
C e *D* hanno *grado* 3
F ha *grado* 0

Grado in un grafo orientato

- In un grafo orientato
  - il grado entrante di un vertice è il numero di archi incidenti in esso
  - il grado uscente di un vertice è il numero di archi uscenti da esso
- In un grafo orientato il grado di un vertice è la somma del suo grado entrante e del suo grado uscente

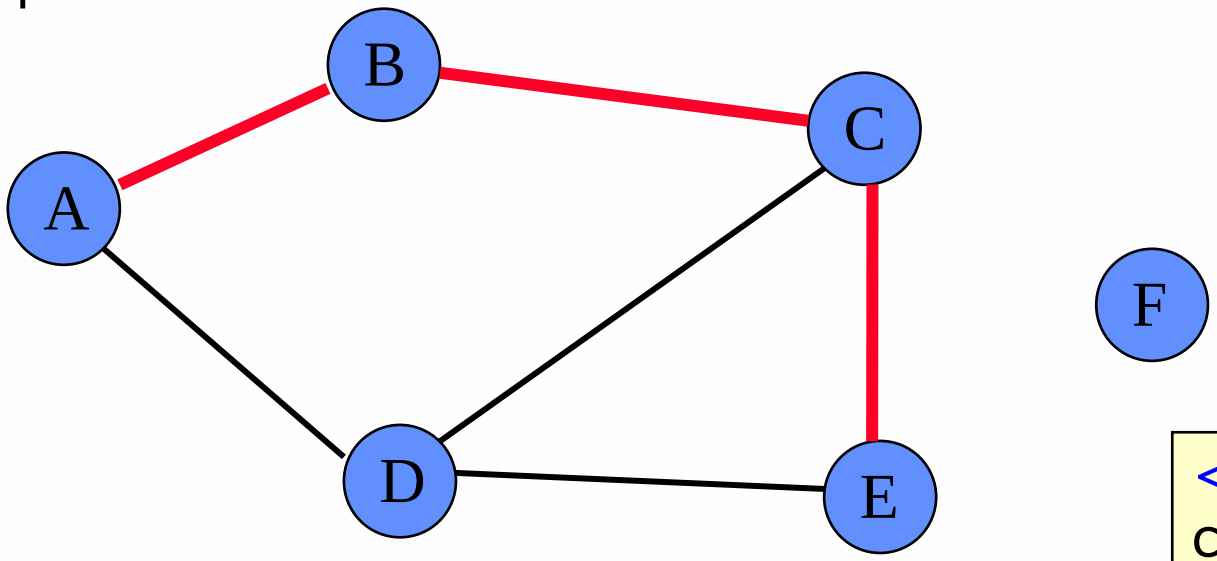


A ha *g. u. 2* e *g. e.* 1
B ha *g. u. 1 e g. e. 1*
C ha *g. u. 0 e g. e. 3*
D ha *g. u. 3 e g. e. 1*

A e *C* hanno *grado 3*
B ha *grado* 2
D ha *grado* 4

Cammini

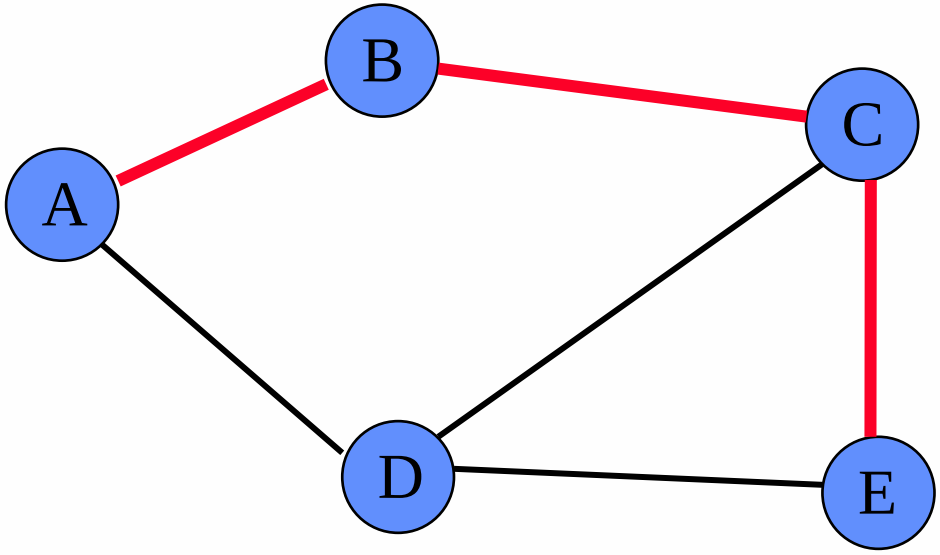
- Un cammino nel grafo G=(V,E) è una sequenza di vertici $<w_0, w_1, \ldots, w_n>$ tale che $(w_i, w_{i+1}) \in E$ per $0 \leq i \leq n-1$
- Il cammino $<w_0, w_1, w_2, \ldots, w_n>$ contiene i nodi $w_0, w_1, \ldots, w_n$ e gli archi $(w_0,w_1)\ (w_1,w_2) \ldots (w_{n-1},w_n)$
- Lunghezza del cammino: # di archi che connettono i vertici nell'ordine della sequenza
- Esempio:



<A, B, C, E> è un cammino nel grafo con lunghezza 3

Cammini (2)

- Un cammino si dice semplice se tutti i suoi vertici sono distinti (compaiono una sola volta nella sequenza)
- Esempio:



F

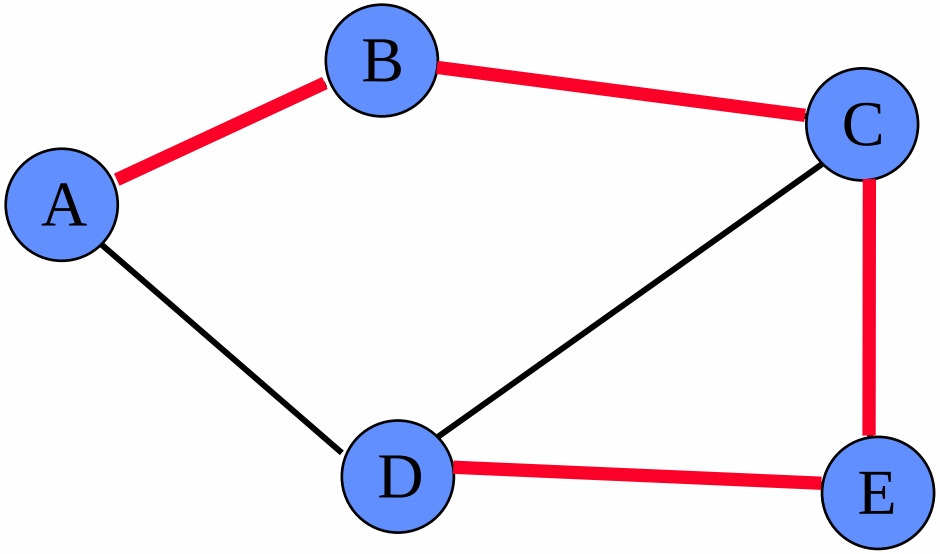
<A, B, C, E>
è semplice ...

... ma il cammino
<A, B, C, E, D, C >
non è semplice,
poiché C è ripetuto

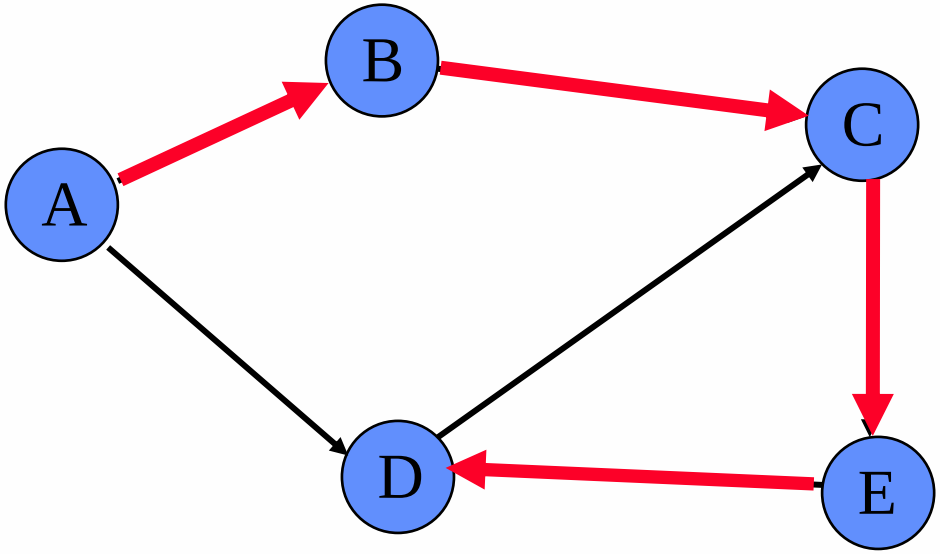
Cammini (3)

- Se esiste un cammino c tra i vertici v e w, si dice che w è raggiungibile da v tramite c

Esempio: A è raggiungibile da D e viceversa



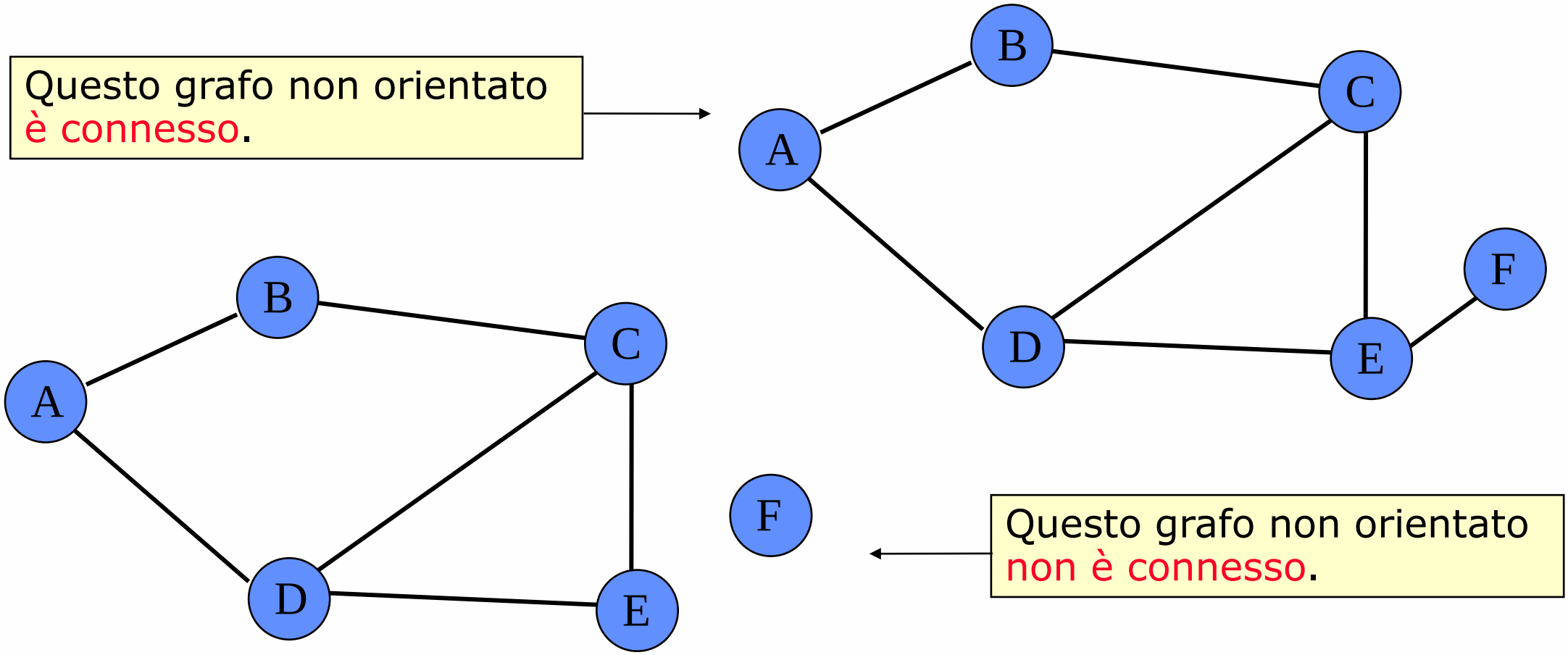
Es.: D è raggiungibile da A ma non viceversa



Grafi connessi

- Se G è un grafo non orientato, diciamo che G è connesso se esiste un cammino da ogni vertice ad ogni altro vertice.

Questo grafo non orientato è connesso.

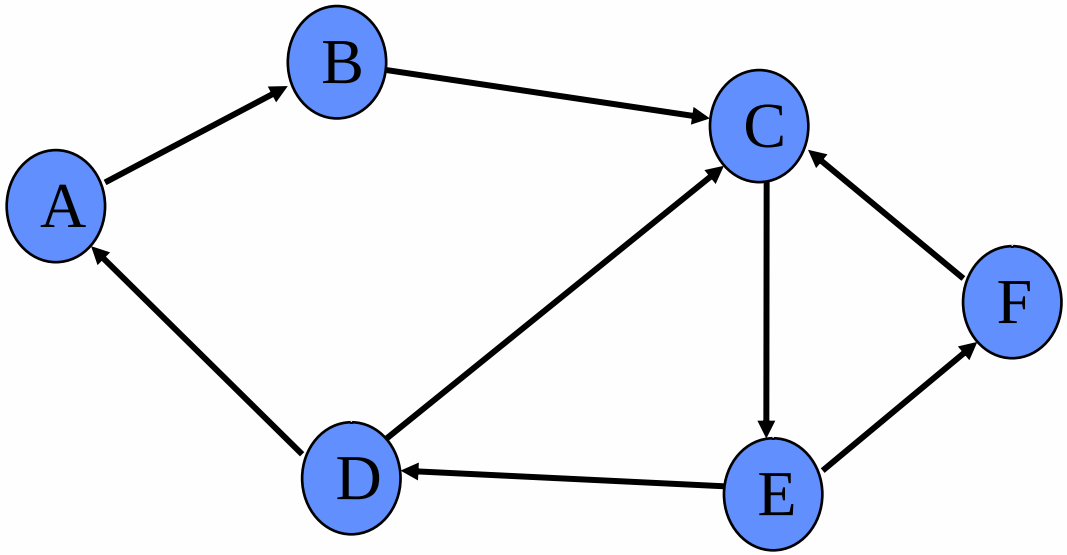


Questo grafo non orientato non è connesso.

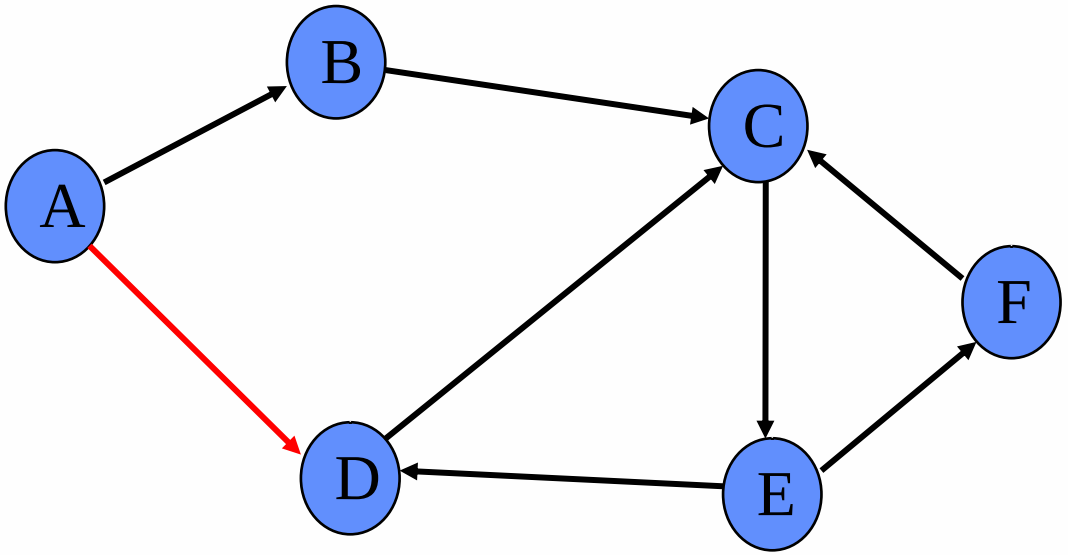
Grafi fortemente connessi

- Se G è un grafo orientato, diciamo che G è fortemente connesso se esiste un cammino da ogni vertice ad ogni altro vertice.

Questo grafo orientato è fortemente connesso.

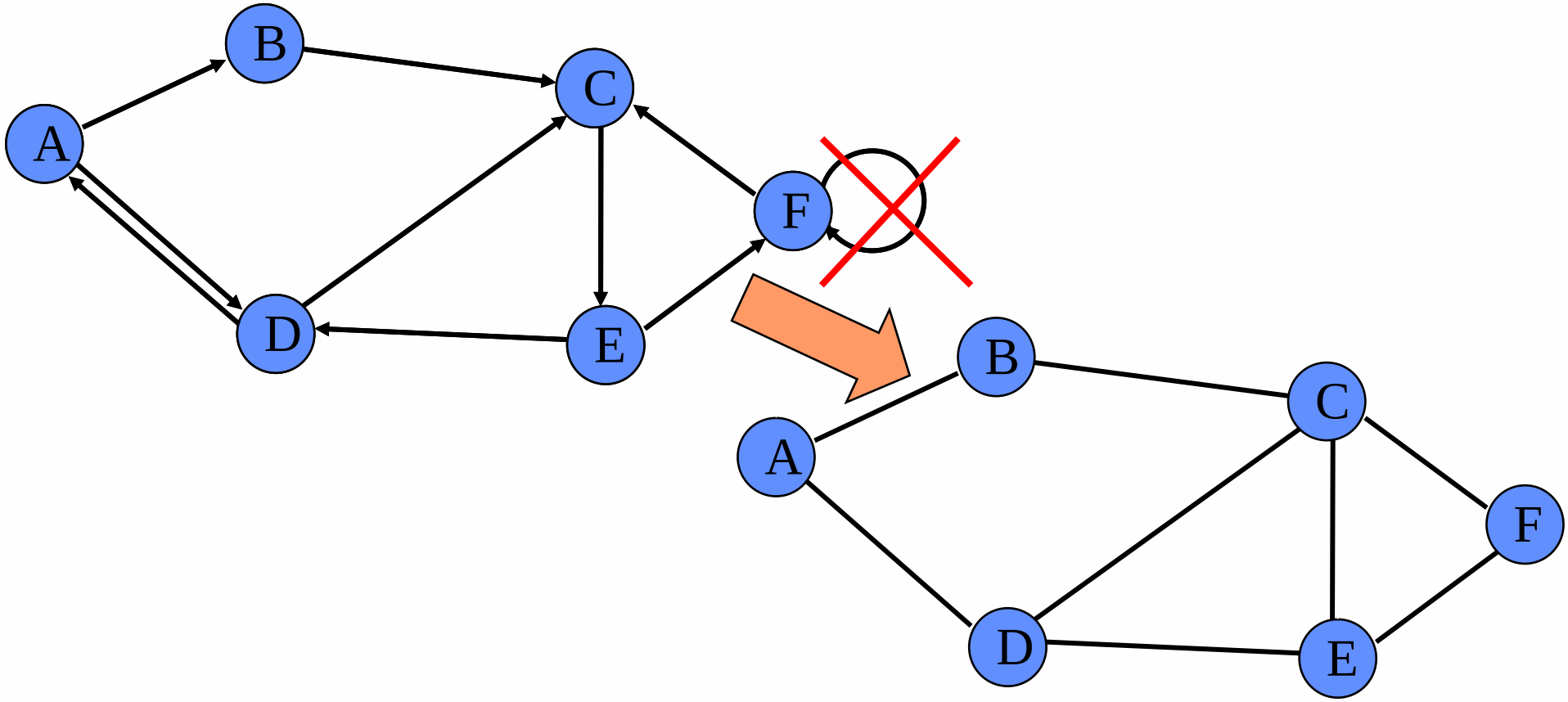


Questo grafo orientato non è fortemente connesso; ad es., non esiste cammino da D a A.



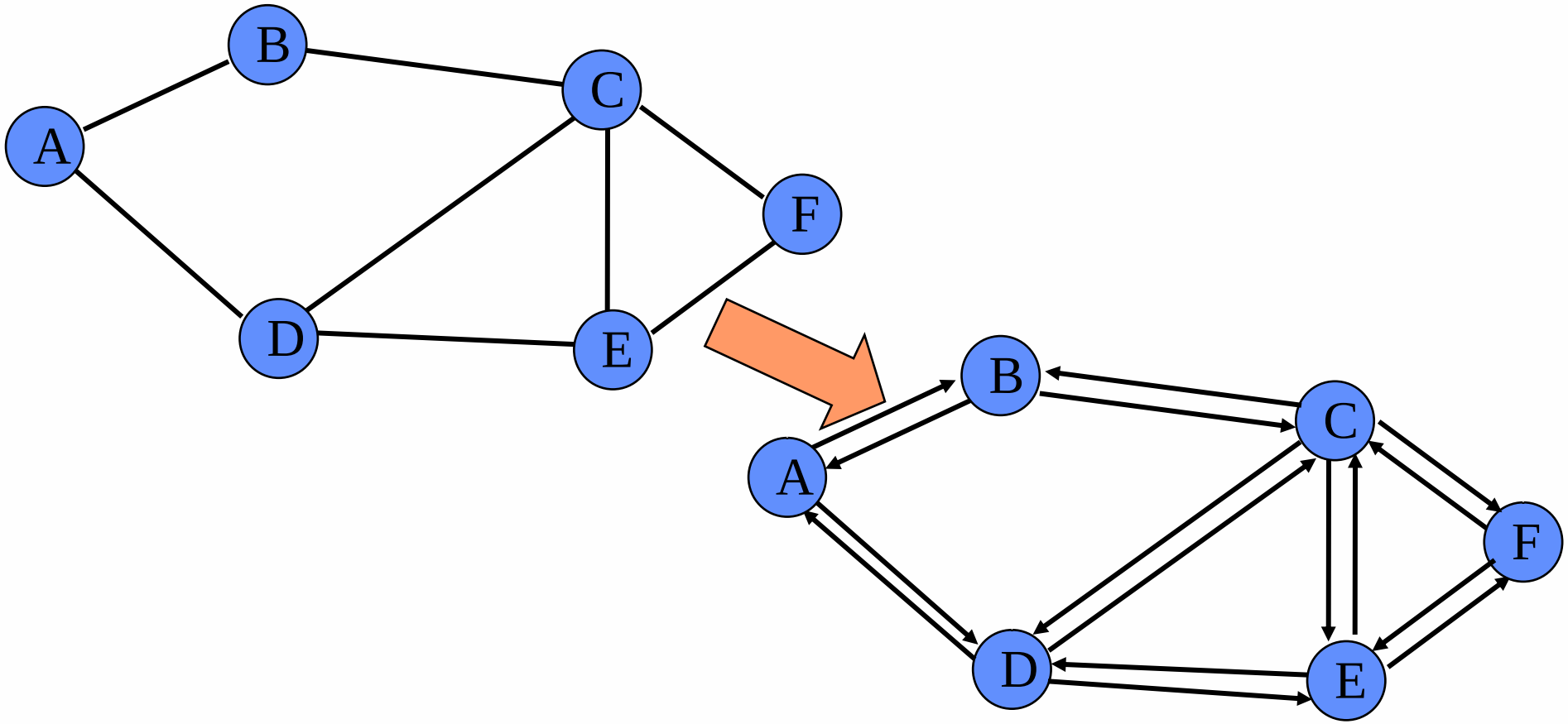
Versione non orientata di un grado

- Se G è un grafo orientato, il grafo ottenuto ignorando la direzione degli archi e gli autoanelli è detto il grafo non orientato sottostante o anche versione non orientata di G.



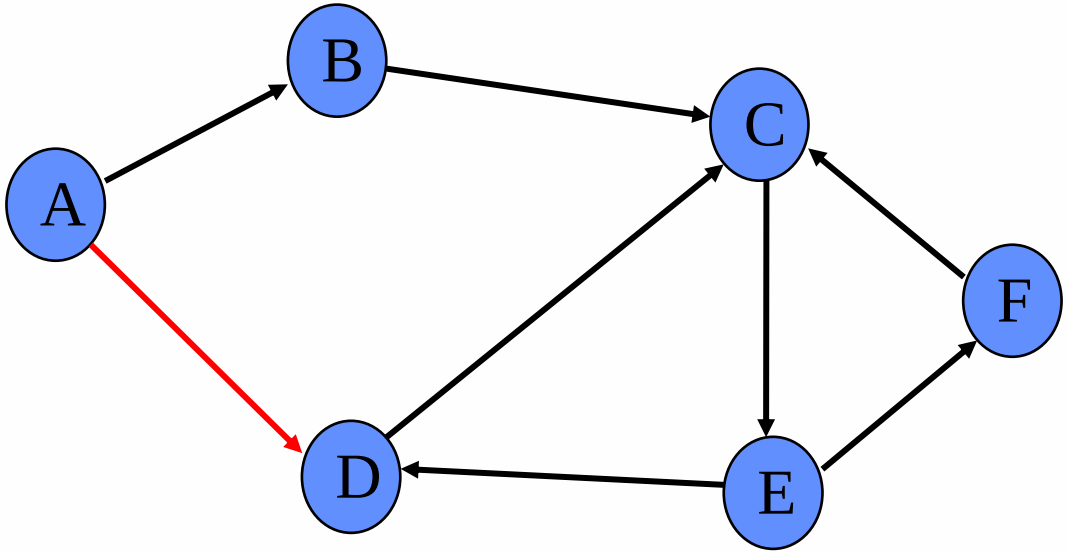
Versione orientata di un grafo

- Se G è un grafo non orientato, il grafo ottenuto inserendo due archi orientati opposti per ogni arco non orientato del grafo è detto la versione orientata di G.



Grafi debolmente connessi

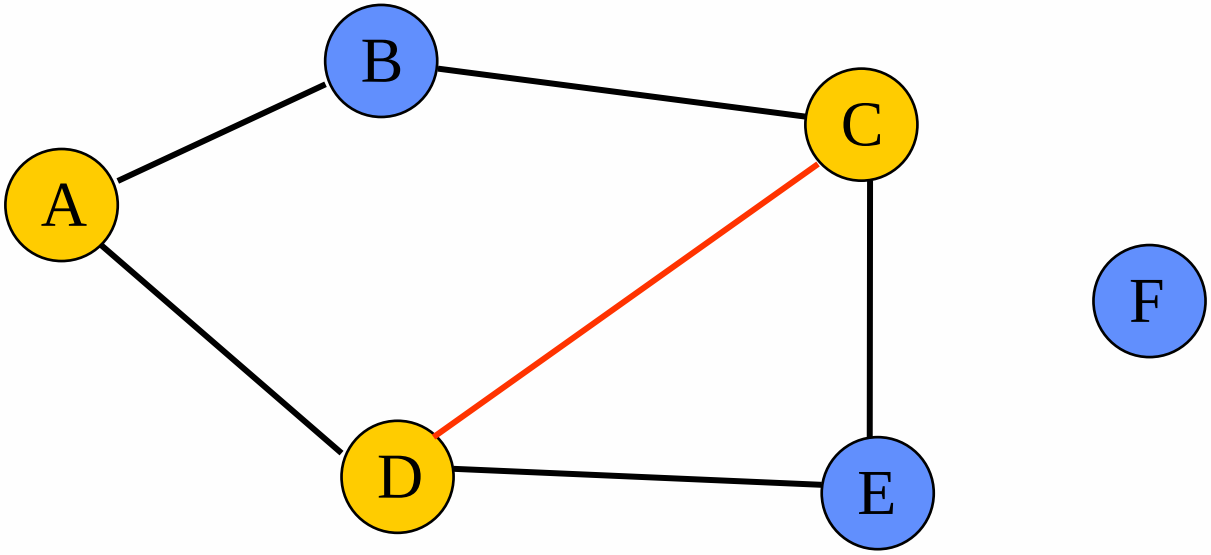
- Se G è un grafo orientato che non è fortemente connesso, ma la sua versione non orientata è connessa, diciamo che G è debolmente connesso



Questo grafo orientato non è fortemente connesso, ma è debolmente connesso

Sottografo

- Sia *G = (V, E)* un grafo. Un *sottografo* di G è un grafo H = (V*, E*) tale che V* ⊆ V e E* ⊆ E



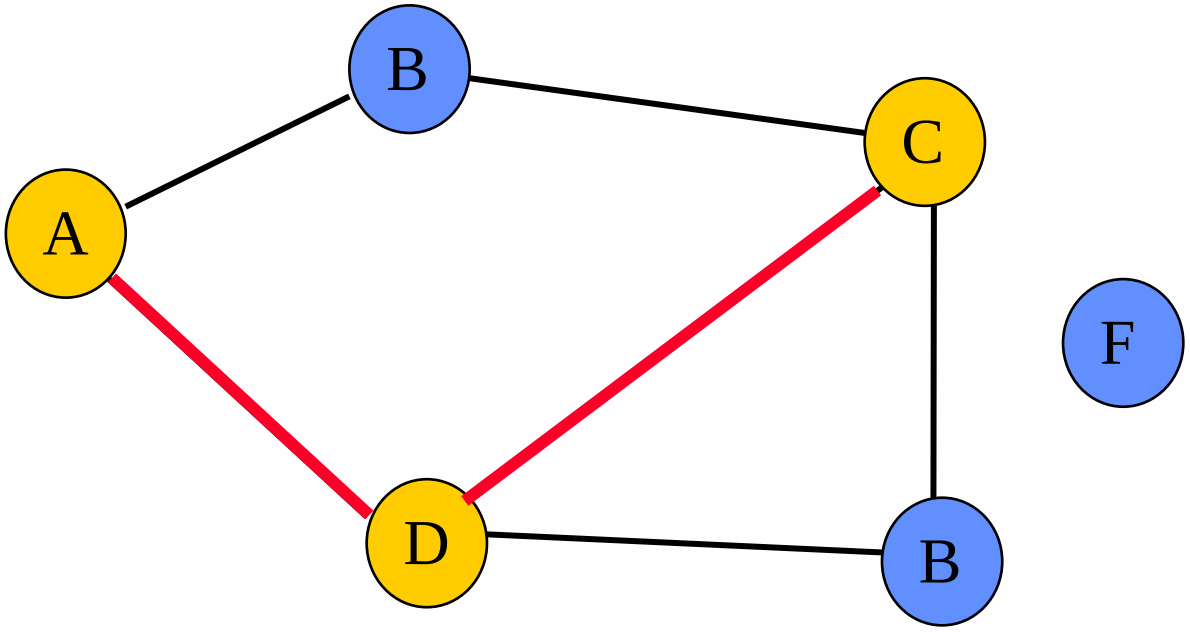
Esempio:

V^* = {A, C, D},

E^* = {(C, D)}.

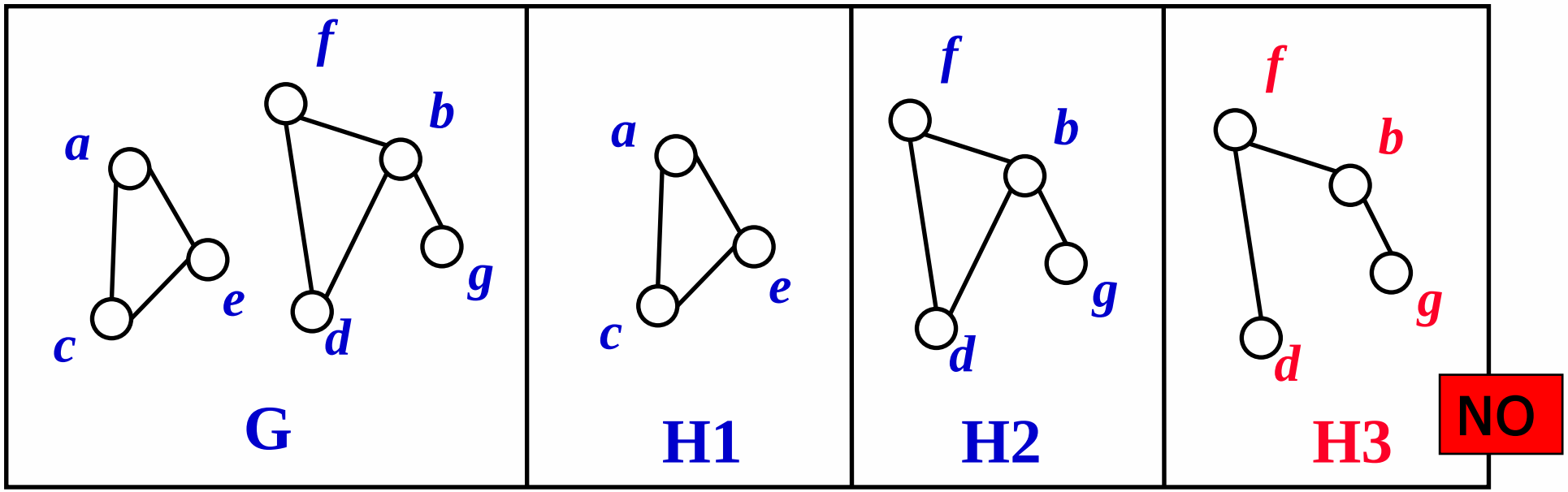
Sottografo indotto

- Sia *G = (V, E)* un grafo e V* ∈ V un insieme di vertici.
- Il *sottografo* di G *indotto* da V* è il grafo *H=(V*, E*)* tale che E* = {(v,w) | (v,w) ∈ E , ∀ v,w ∈ V*}
- Sia *G = (V, E)* un grafo. Il *sottografo* H=(V*, E*) di G è detto di supporto se: *V* = V*



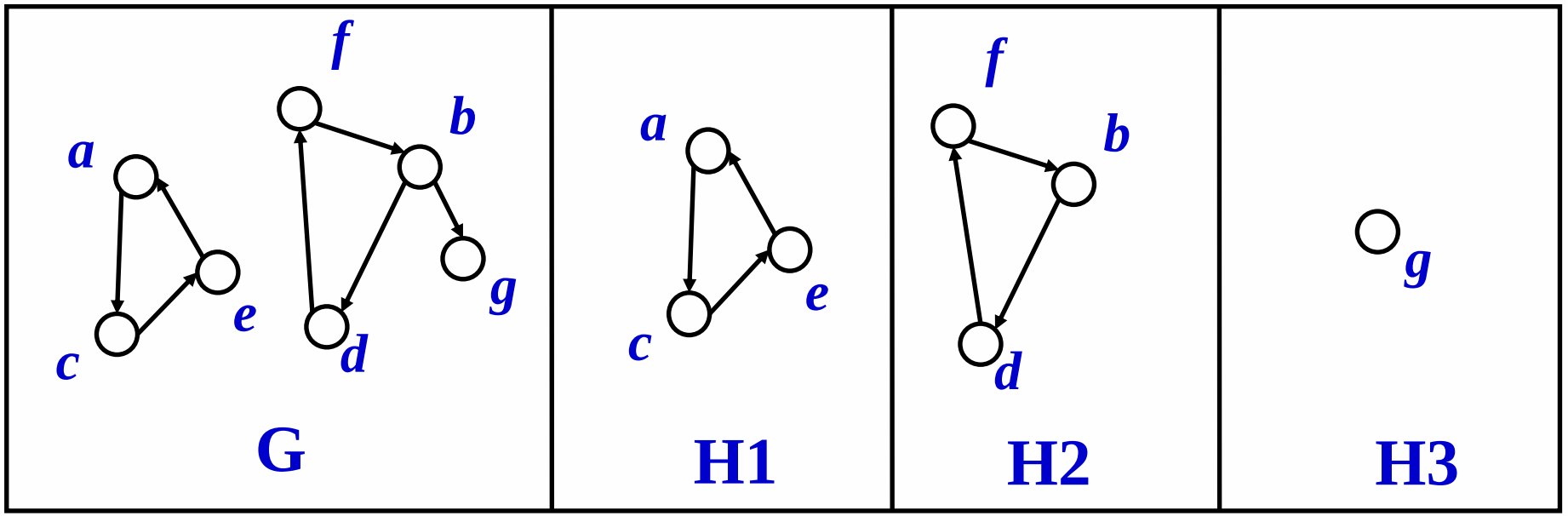
Componenti connesse

- Si dice componente connessa di un grafo non orientato G, un sottografo H di G che sia connesso e massimale
- Un sottografo connesso H di G viene detto massimale se si non si possono aggiungere ad H altri vertici o archi in modo che il grafo risultante sia ancora un sottografo connesso di G
- Esempi:

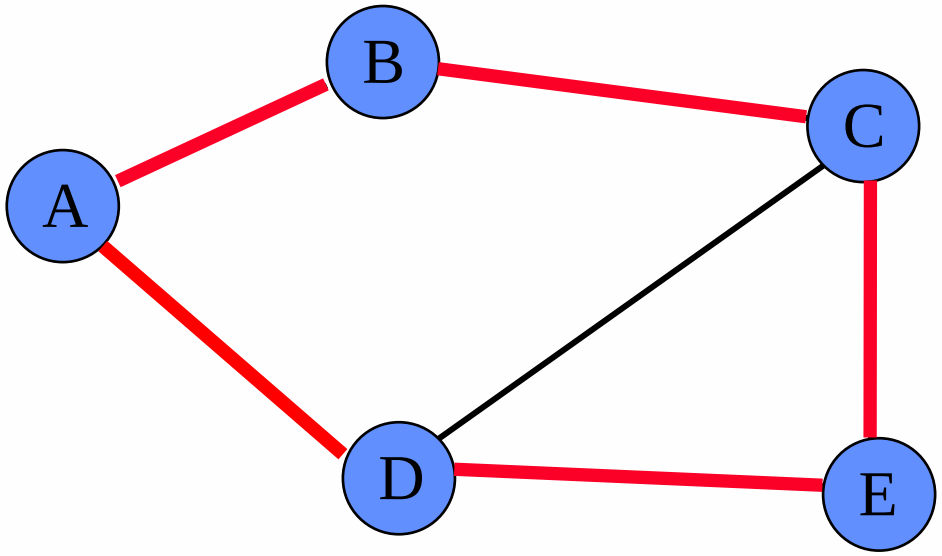


Componenti fortemente connesse

- Si dice componente fortemente connessa di un grafo orientato G, un sottografo H di G che sia fortemente connesso e massimale
- Esempi:



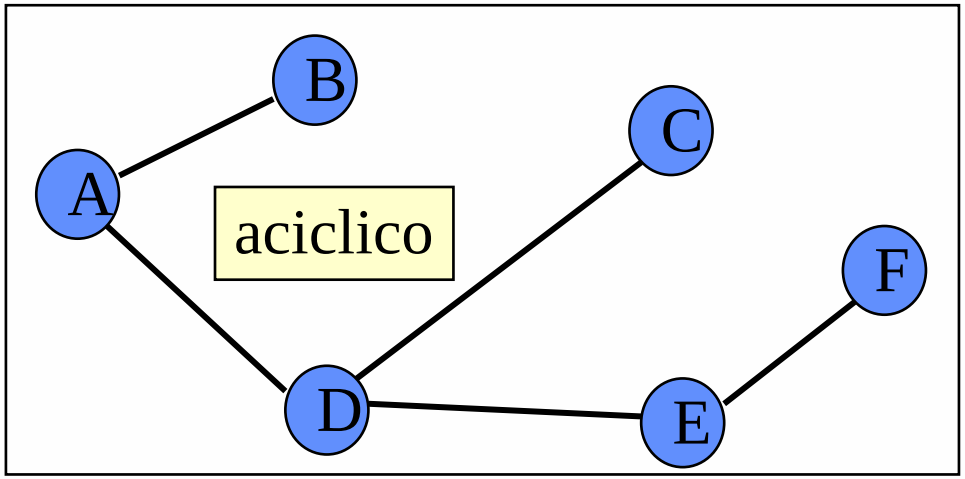
- Un ciclo in un grafo orientato è un cammino $<w_0, w_1, \ldots, w_n>$ di lunghezza almeno 3, tale che $w_0 = w_n$
- Un ciclo è semplice se i nodi $w_1, \ldots, w_{n-1}$ sono tutti distinti

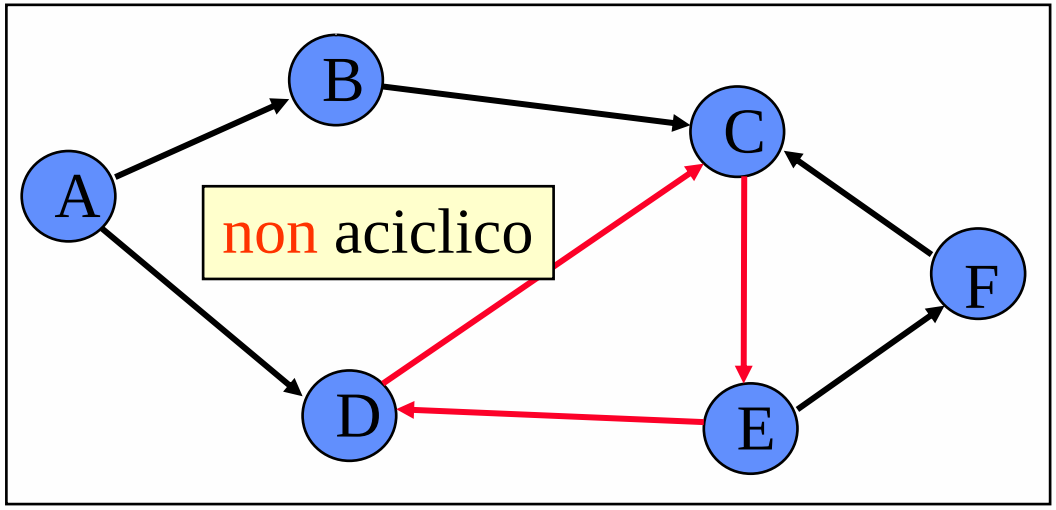


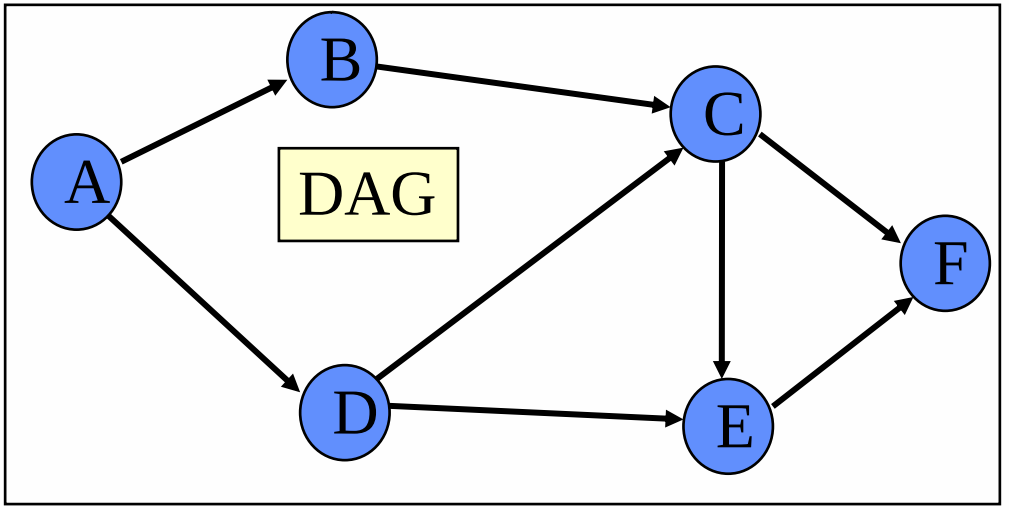
Es.: il cammino
<A, B, C, E, D, A>
è un ciclo semplice

Grafi aciclici

- Un grafo senza cicli è detto aciclico.
- Un grafo orientato aciclico è chiamato DAG (Directed Acyclic Graph).
- Esempi:





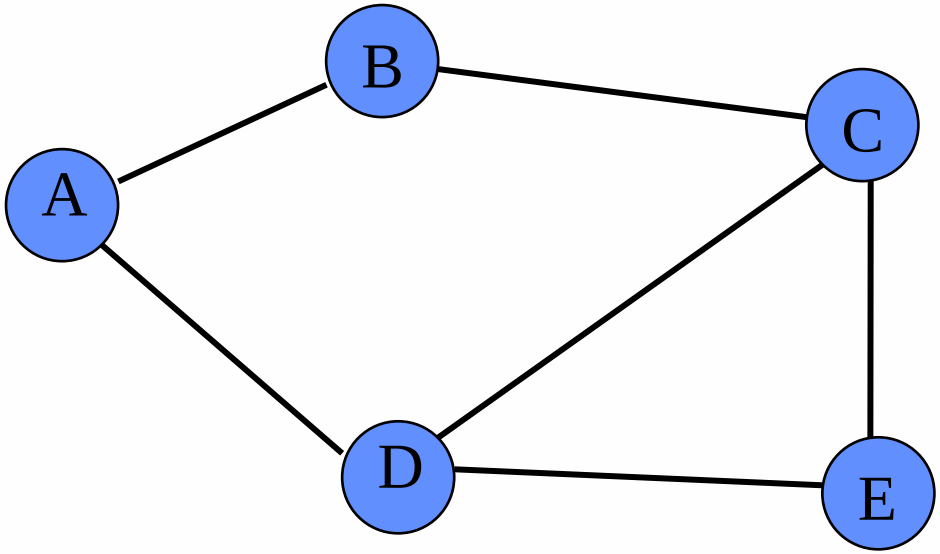


Grafo completo

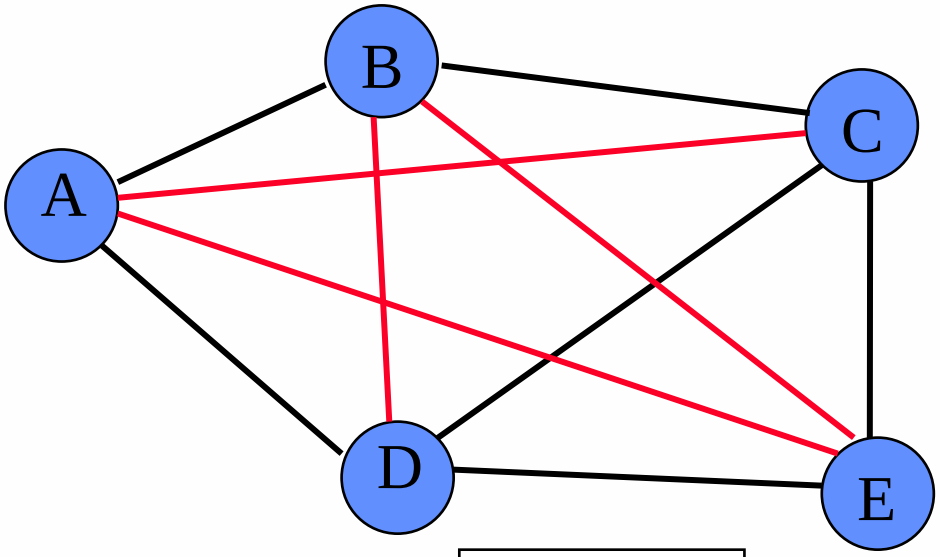
- Un grafo completo è un grafo che ha un arco tra ogni coppia di vertici.
- Un grafo completo con n=|V| veritci ha un numero di archi pari a:

$$\sum_{i=1}^{n-1} i = \frac{n(n-1)}{2}$$

- Esempi:

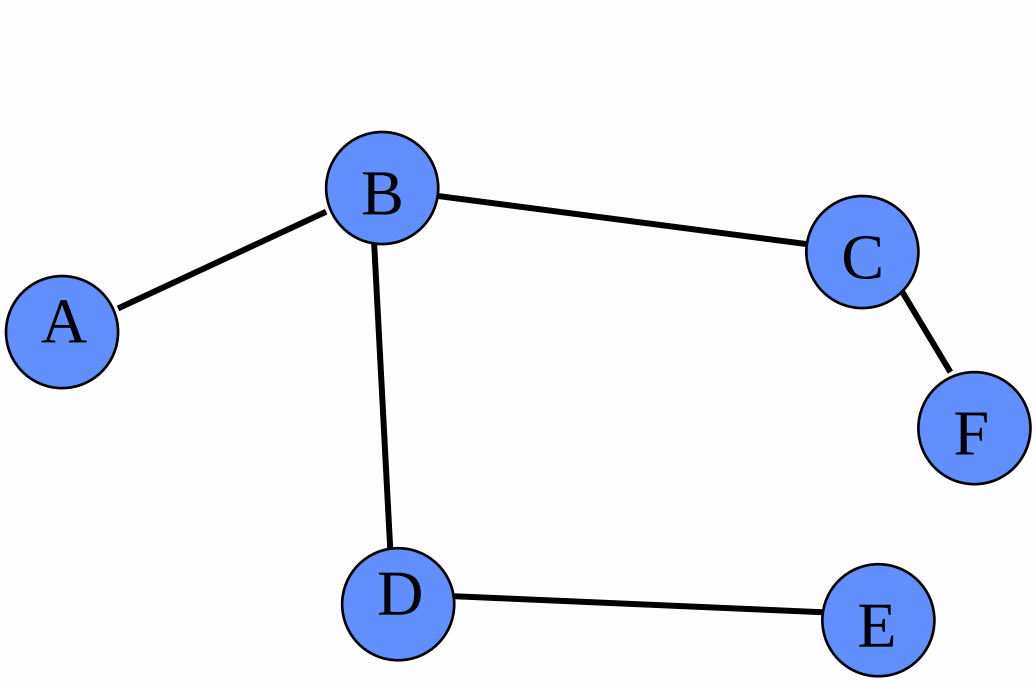


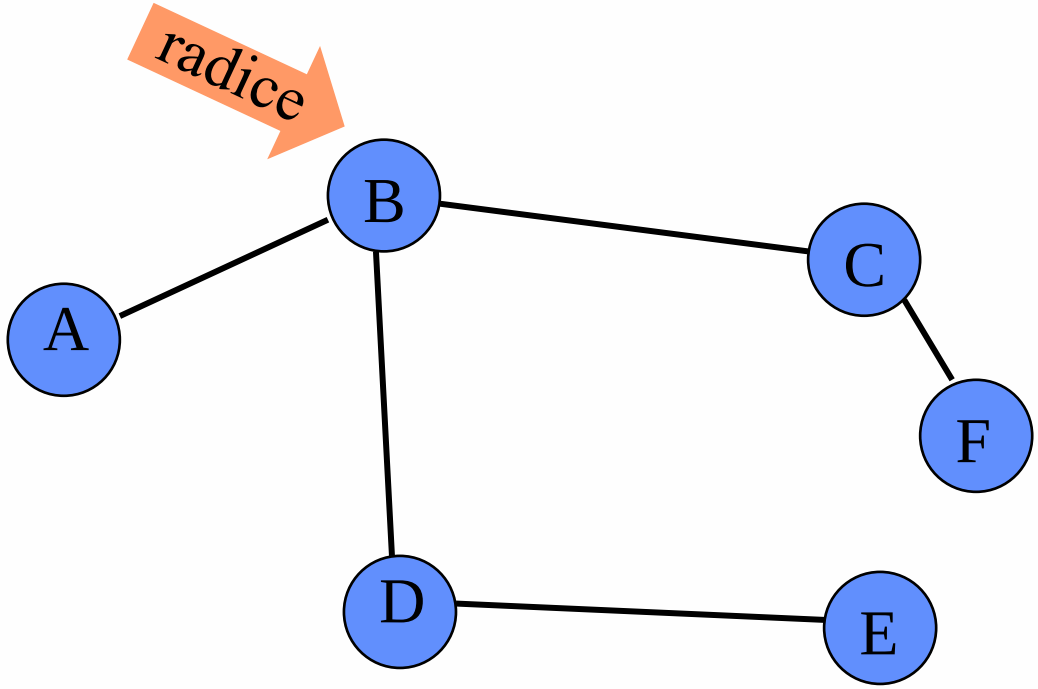
non completo



completo

- Un albero libero è un grafo non orientato connesso, aciclico.
- Se qualche vertice è detto radice, otteniamo un albero radicato.





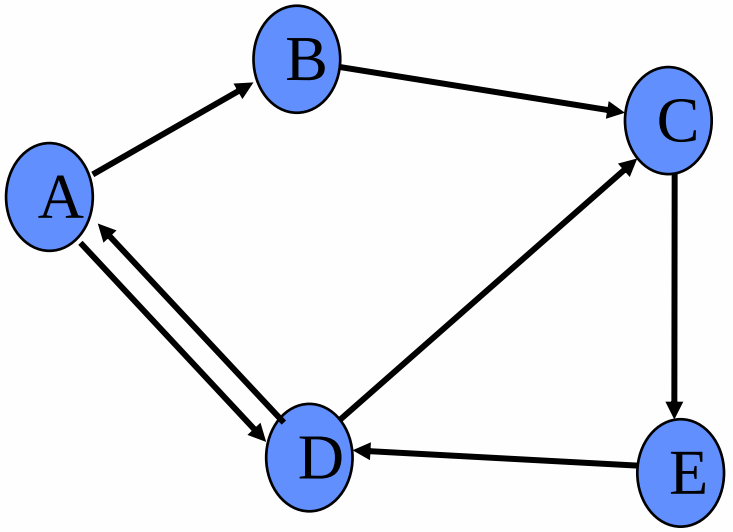
Strutture dati per i grafi

Matrice di adiacenza: grafo orientato

$$M[v, w] = \begin{cases} 1 & \text{se } (v, w) \in E \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Memoria: $|V|^2$

- Esempio:



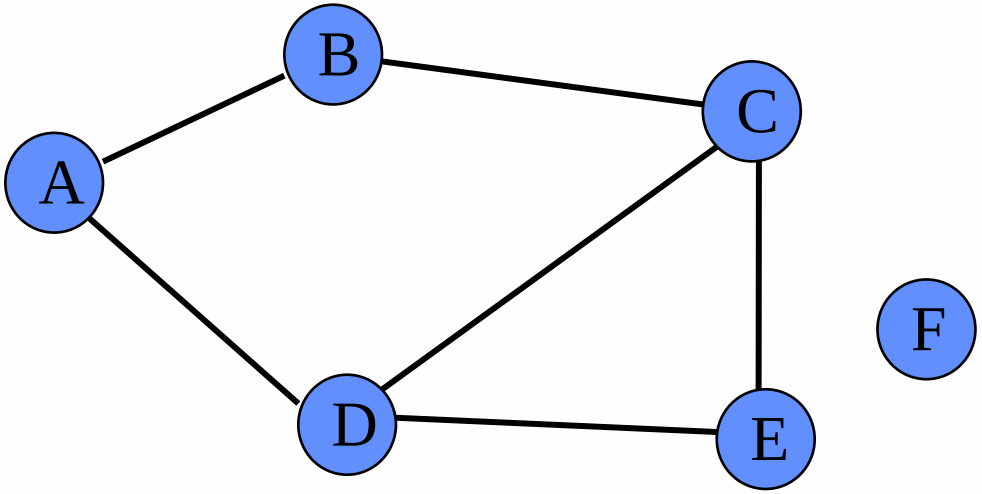
	A	B	C	D	E	F
A	0	1	0	1	0	0
B	0	0	1	0	0	0
C	0	0	0	0	1	0
D	1	0	1	0	0	0
E	0	0	0	1	0	0
F	0	0	0	0	0	0

Matrice di adiacenza: grafo non orientato

$$M(v, w) = \begin{cases} 1 & \text{se } (v, w) \in E \text{ o } (w,v) \in E \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Memoria: $|V|^2$ o $|V|(|V|-1)/2$

- Esempio:

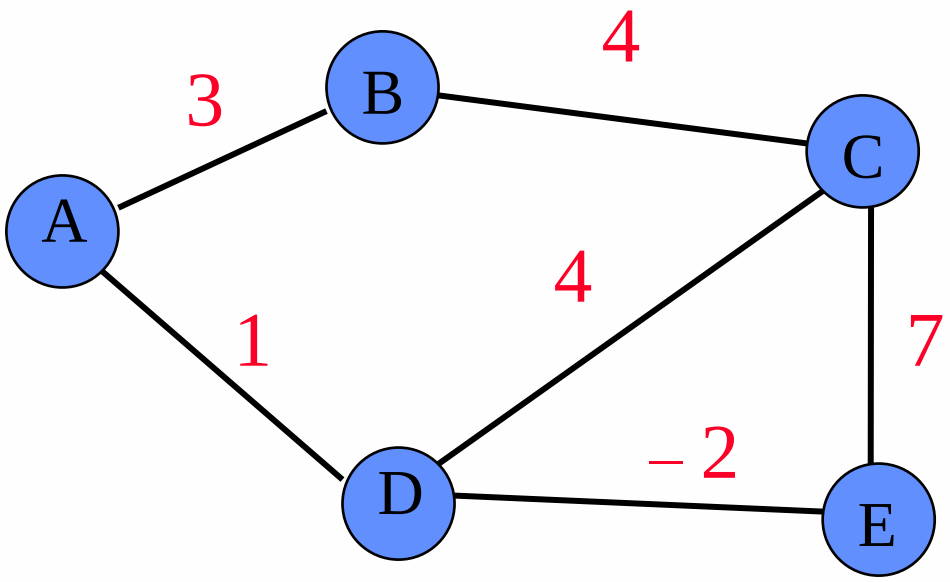


	A	B	C	D	E	F
A	0	1	0	1	0	0
B	1	0	1	0	0	0
C	0	1	0	1	1	0
D	1	0	1	0	1	0
E	0	0	1	1	0	0
F	0	0	0	0	0	0

Matrice di adiacenza in grafi pesati

$$M(v, w) = \begin{cases} c(v,w) & \text{se } (v, w) \in E \\ \infty & \text{altrimenti} \end{cases}$$

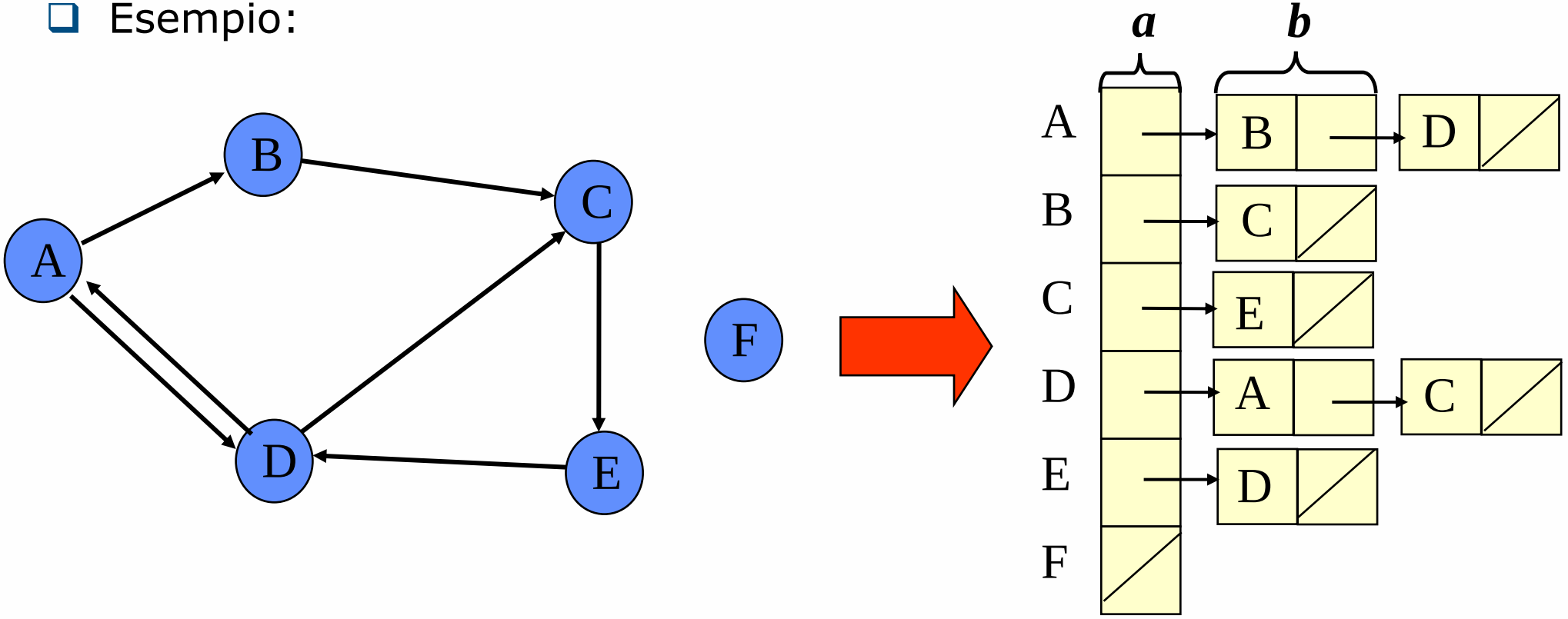
Memoria: $|V|^2$ o $|V|(|V|-1)/2$



	A	B	C	D	E	F
A	*	3	*	1	*	*
B	3	*	4	*	*	*
C	*	4	*	4	7	*
D	1	*	4	*	-2	*
E	*	*	7	-2	*	*
F	*	*	*	*	*	*

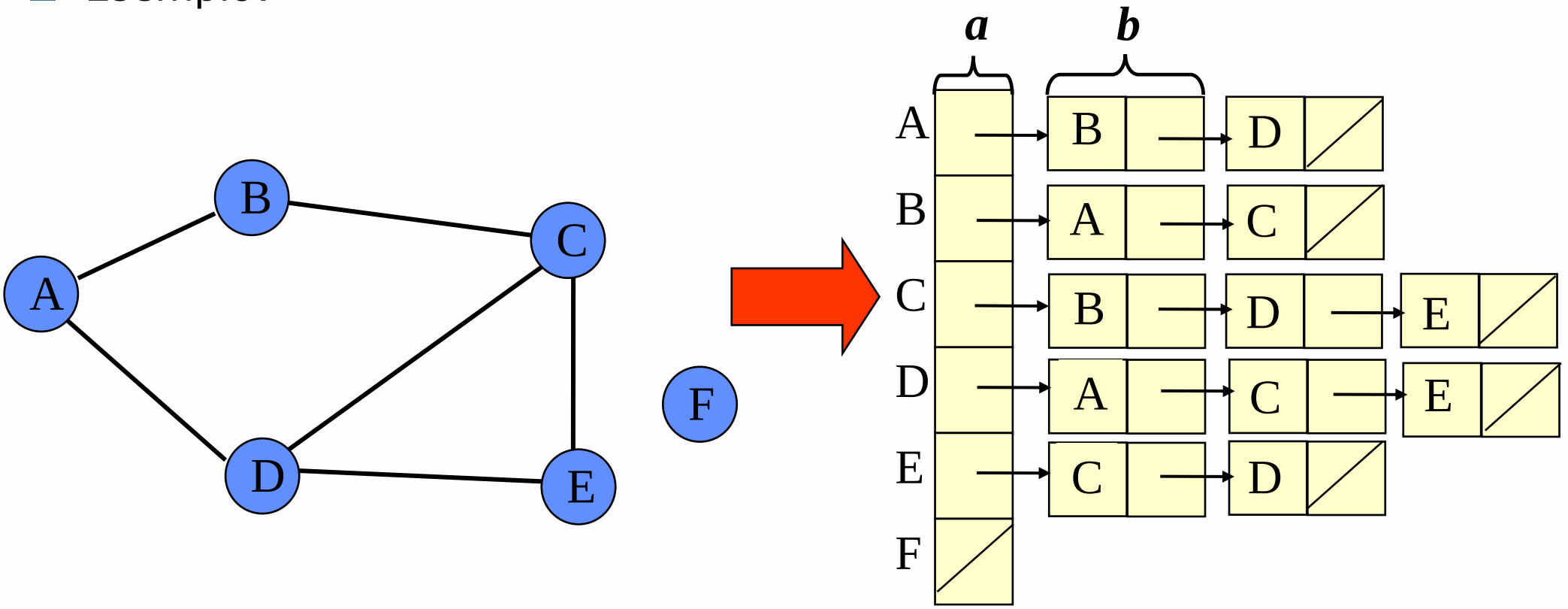
Lista di adiacenza: grafo orientato

- La lista di adiacenza di un vertice v è definita come
  { w ∈ V | (v,w) ∈ E }
- Un grafo può essere quindi rappresentato con un array di liste di adiacenze
- La memoria richiesta è a|V| + b|E| (a e b costanti)
- Esempio:



Liste di adiacenza: grafo non orientato

- La lista di adiacenza di un vertice v è definita come
  $\{ w \in V \mid (v,w) \in E \vee (w,v) \in E\}$
- Lo stesso arco viene memorizzato in due liste di adiancenze, quindi la memoria richiesta è $a|V| + 2b|E|$ (a e b costanti)
- Esempio:



Sommario sulle strutture dati

- Ci sono due tipi standard di rappresentazioni di grafi in un computer:
  - Matrice di adiacenza
    - Spazio richiesto $O(V^2)$
    - Verificare se il vertice v è adiacente a w richiede tempo $O(1)$
    - Elencare tutti gli archi costa $O(V^2)$
  - Liste di adiacenza
    - Spazio richiesto $O(V+E)$
    - Verificare se il vertice v è adiacente a w richiede tempo $O(V)$
    - Elencare tutti gli archi costa $O(V+E)$
- Nota: nelle espressioni, V corrisponde a |V| e E corrisponde a |E|

Visita di un grafo

Visita di un grafo

- Dato un grafo G=<V,E> ed un vertice s di V (detto sorgente), intendiamo con visita di G a partire dalla sorgente s un attraversamento tale che:
  - ogni vertice di G raggiungibile da s venga visitato
  - ogni nodo raggiunto sia visitato una volta sola
- L'operazione di visita di un vertice può comportare diverse operazioni che dipendono dal problema per cui viene effettuata la visita del grafo
- Generalmente durante la visita ogni vertice viene marcato per evitare di visitarlo nuovamente
- Spesso viene anche memorizzato l'albero di visita che descrive il percorso attraverso cui si può giungere ad un vertice
- Esistono diversi algoritmi di visita, vedremo i principali:
  - Visita in ampiezza (breadth-first search)
  - Visita in profondità (depth-first search)

Visita in ampiezza (breadth first search, BFS)

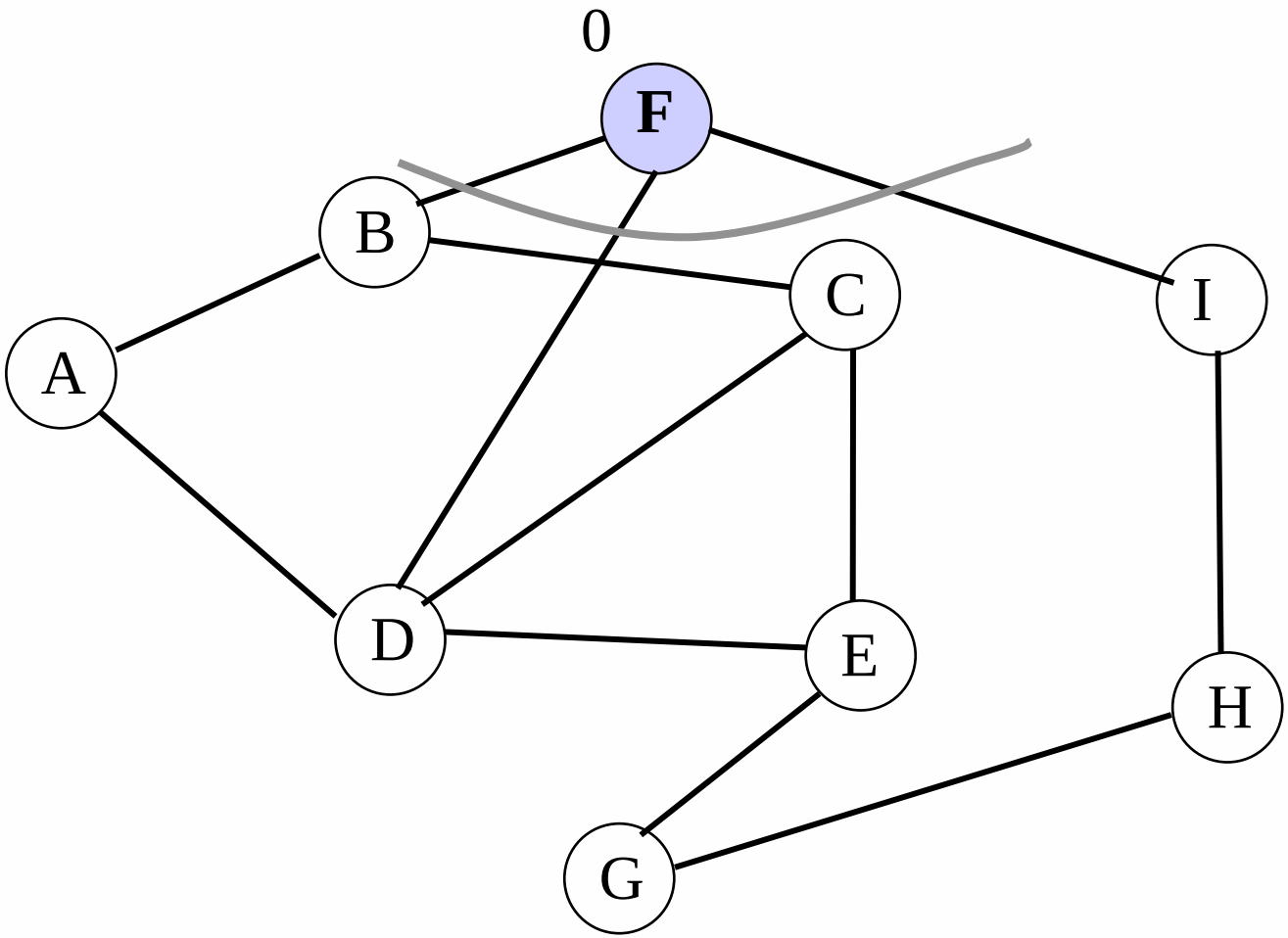
- Come funziona?
  - Visita i vertici a distanze crescenti dalla sorgente: visita tutti i vertici a distanza k prima di visitare i vertici a distanza k+1
- Output
  - Albero BF (breadth-first) contenente tutti i vertici raggiungibili da s e tale che il cammino da s ad un nodo nell'albero corrisponde al cammino più breve nel grafo
  - Distanza minima da s a tutti i vertici raggiungibili numero di archi attraversati per andare da s ad un vertice

BFS: algoritmo di visita


```
BFS(G, s)
  for each v in V do
      mark[v] = white
  π[s] = nil
  F = ∅
  F.enqueue(s)
  mark[s] = gray
  dist[s] = 0
  while F <> ∅ do
    u = F.dequeue()
    "visita il vertice u"
    for each v in adj[u] do
      if (mark[v]==white)
      then
        mark[v] = gray
        dist[v] = dist[u]+1
        F.enqueue(v)
        π[v] := u
  mark[u] = black
```

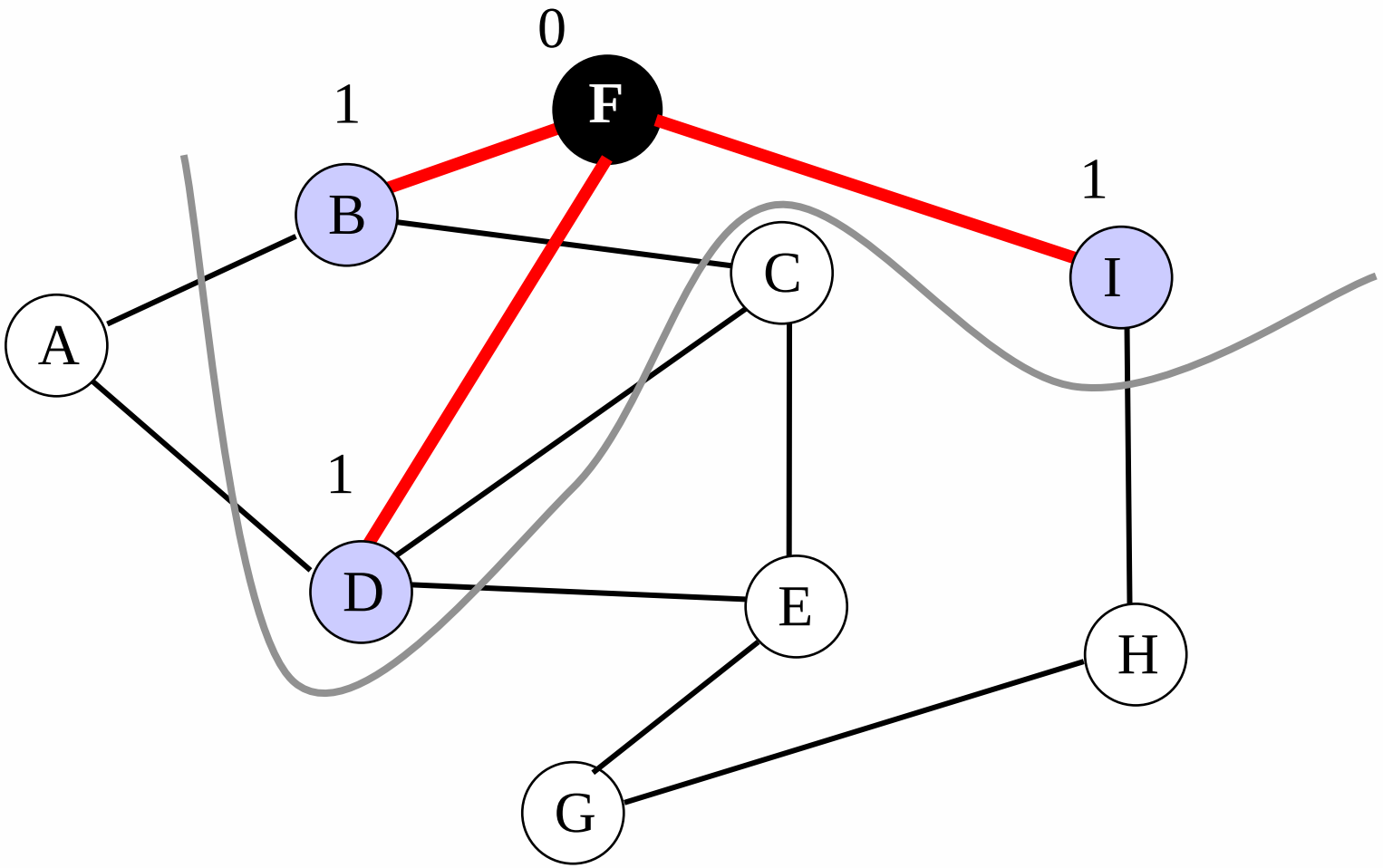
- *F* è l'insieme dei nodi scoperti, detto anche frontiera
- *mark[v]* è la marcatura del nodo *v*
  - white: il nodo non è ancora stato raggiunto
  - gray: il nodo è stato raggiunto ma non è ancora visitato (è in F)
  - black: il nodo è stato visitato
- *dist[v]* è la distanza del nodo *v* dal vertice *s*
- *π[v]* è il predecessore di v nell'albero di copertura
- Costo:
  - O(|V|+|E|) liste
  - O($|V|^2$) matrice

Esempio



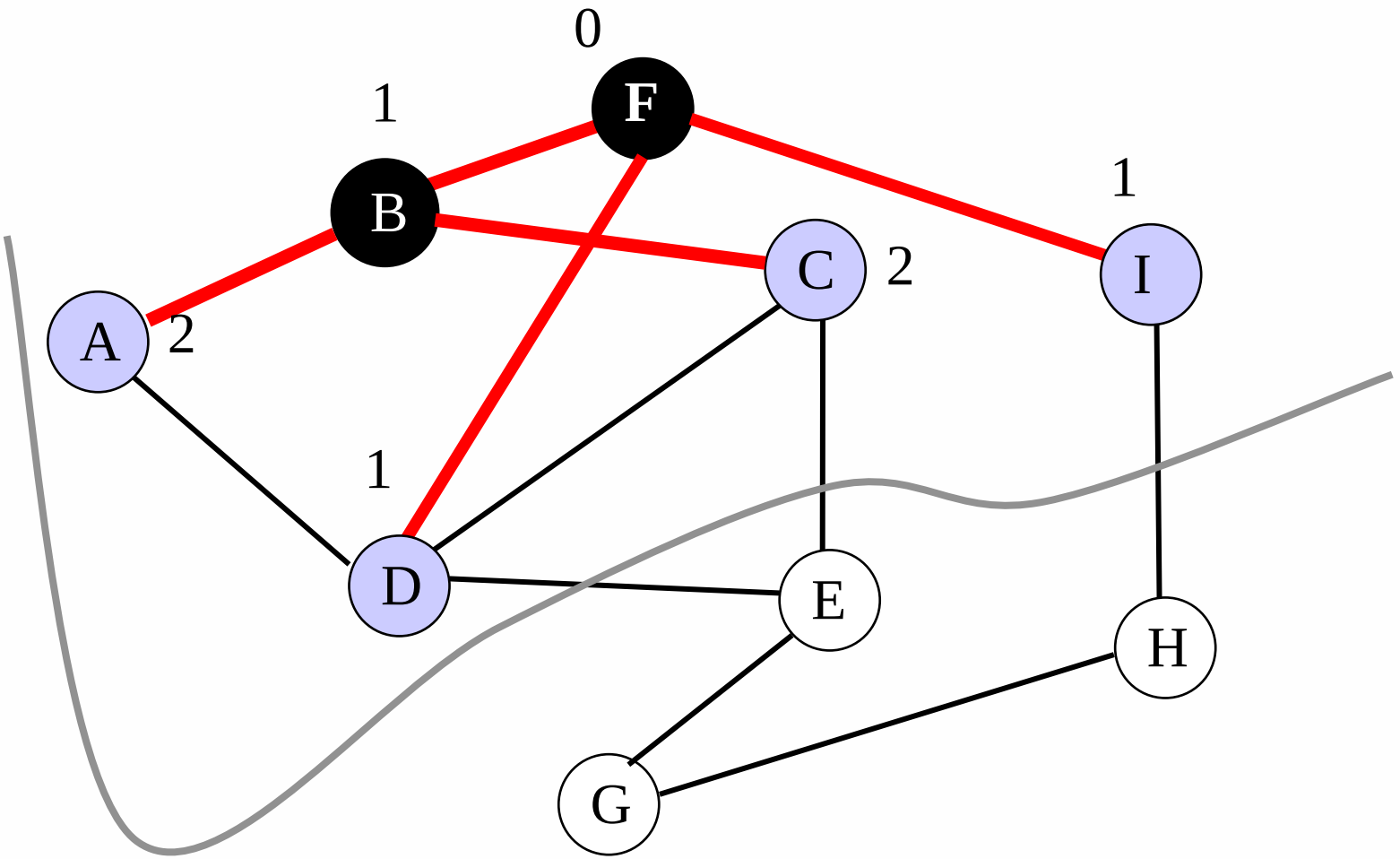
Coda: {F}

Esempio



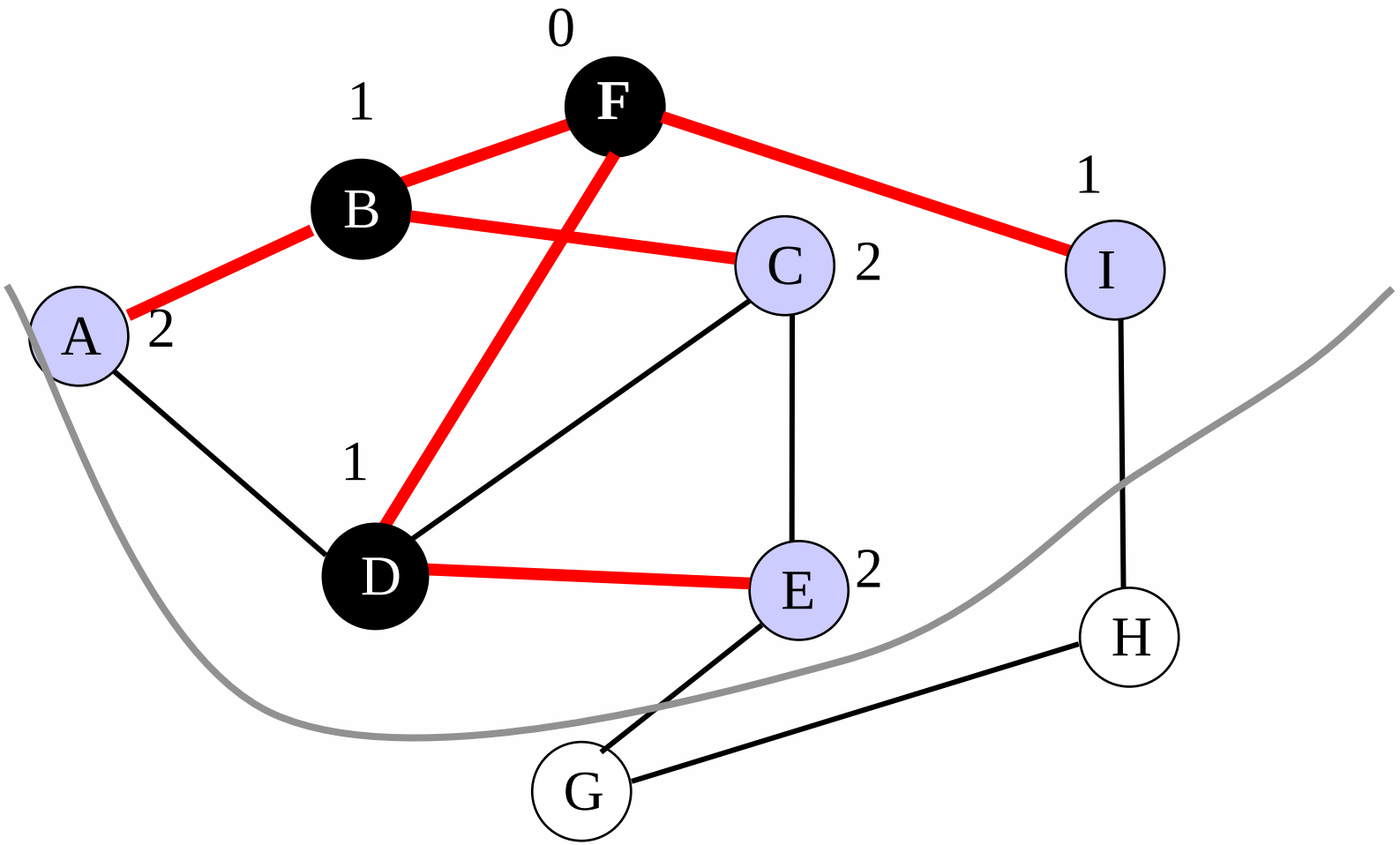
Coda:{B,D,I}

Esempio



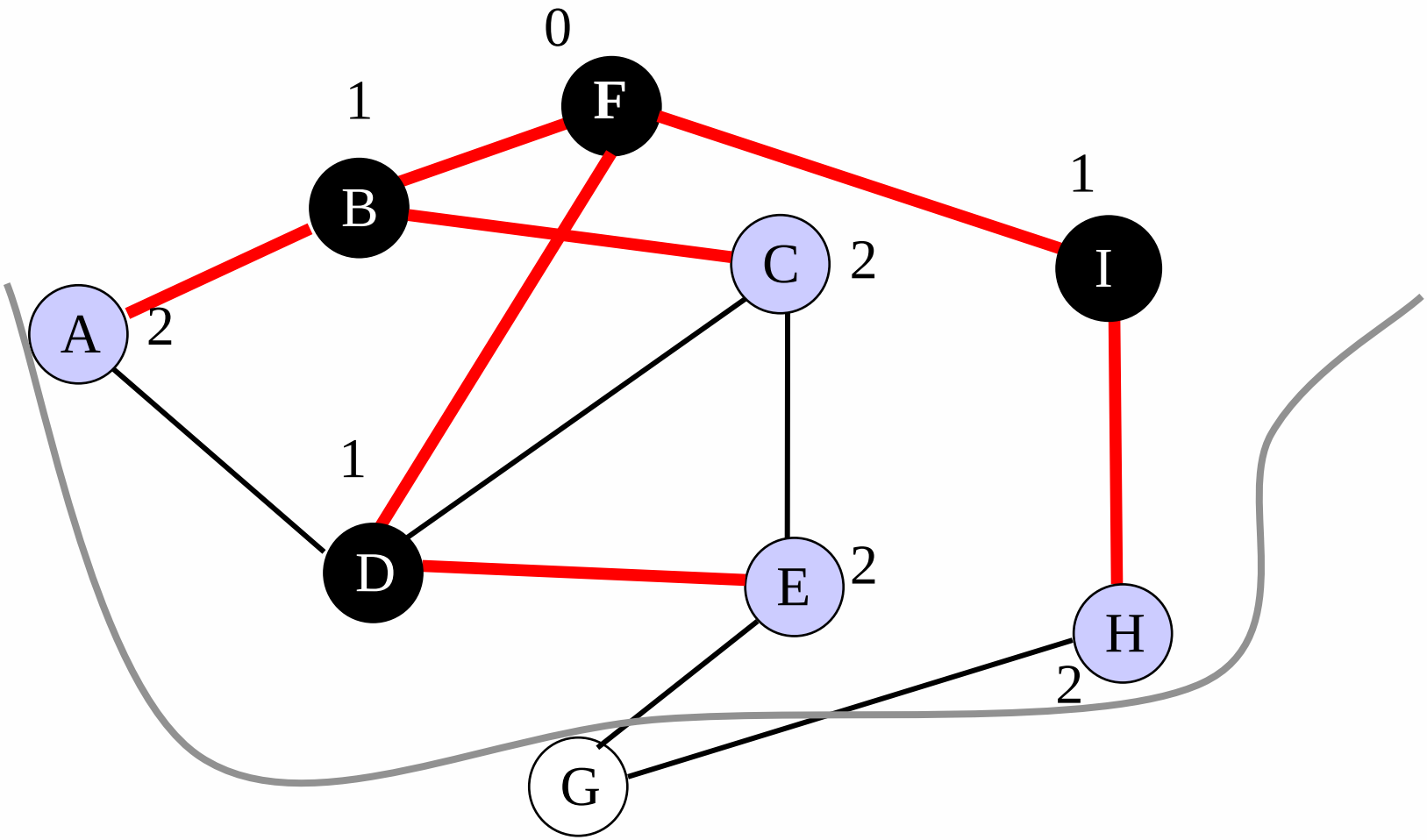
Coda: {D, I, C, A}

Esempio



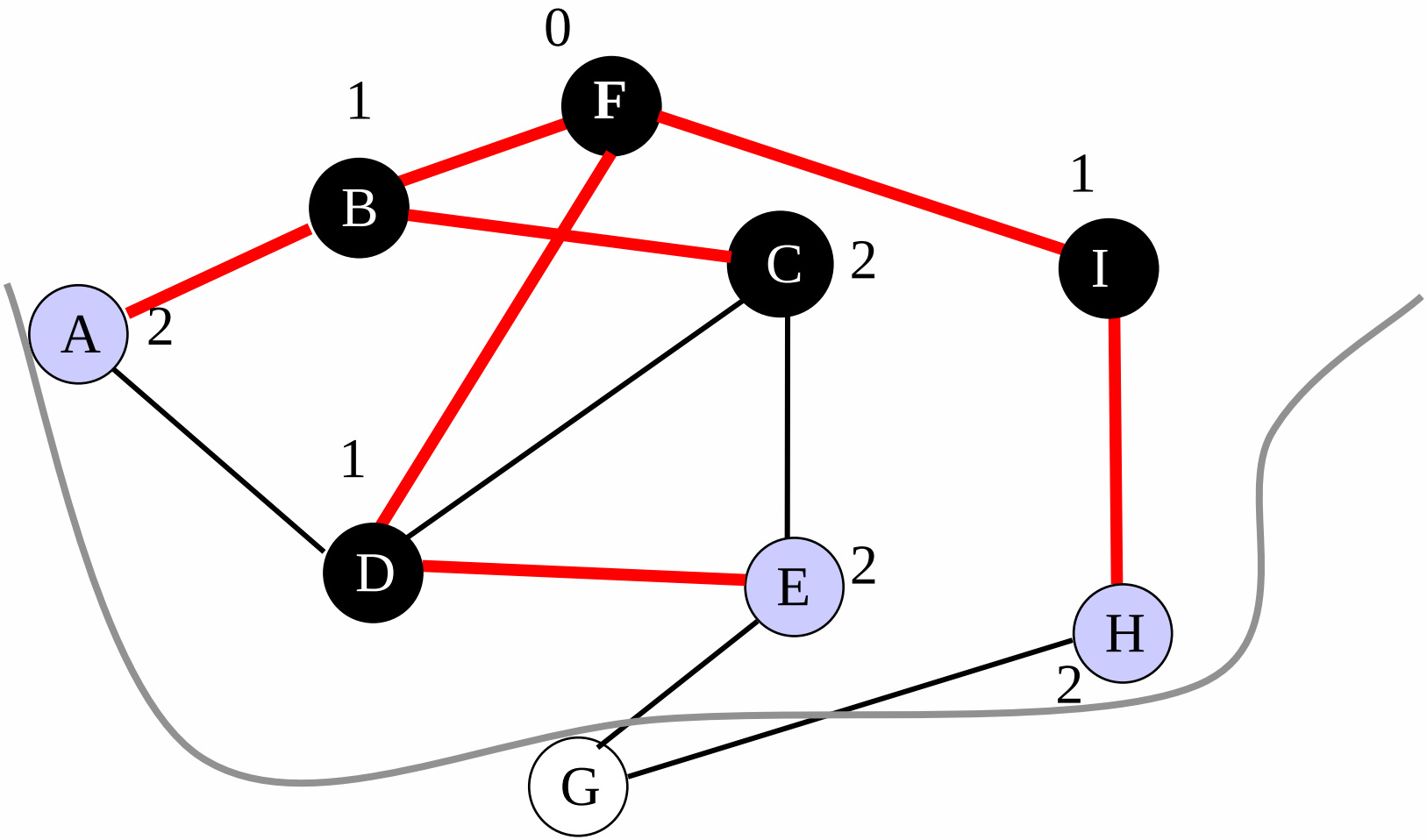
Coda: {I, C, A, E}

Esempio



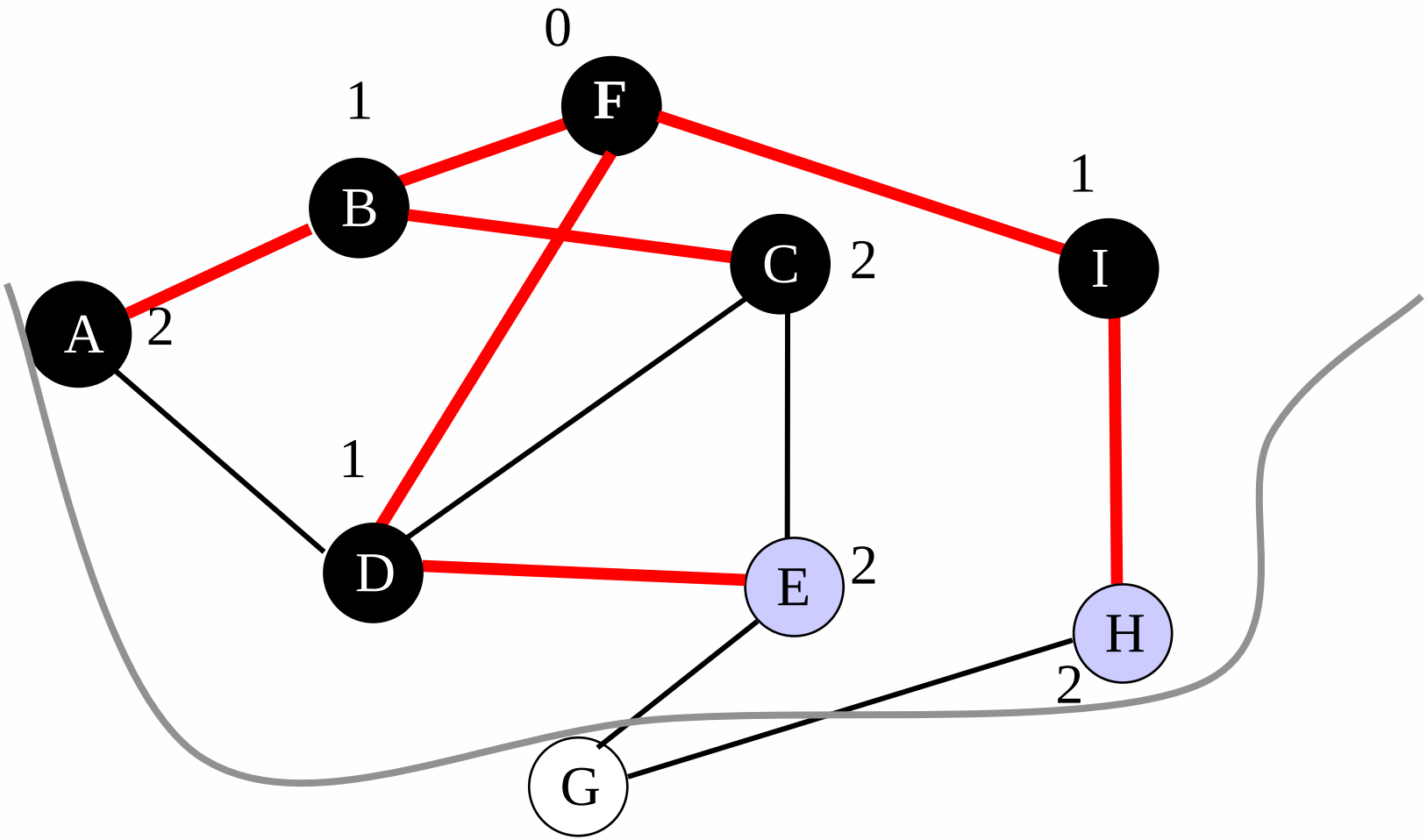
Coda: {C, A, E, H}

Esempio



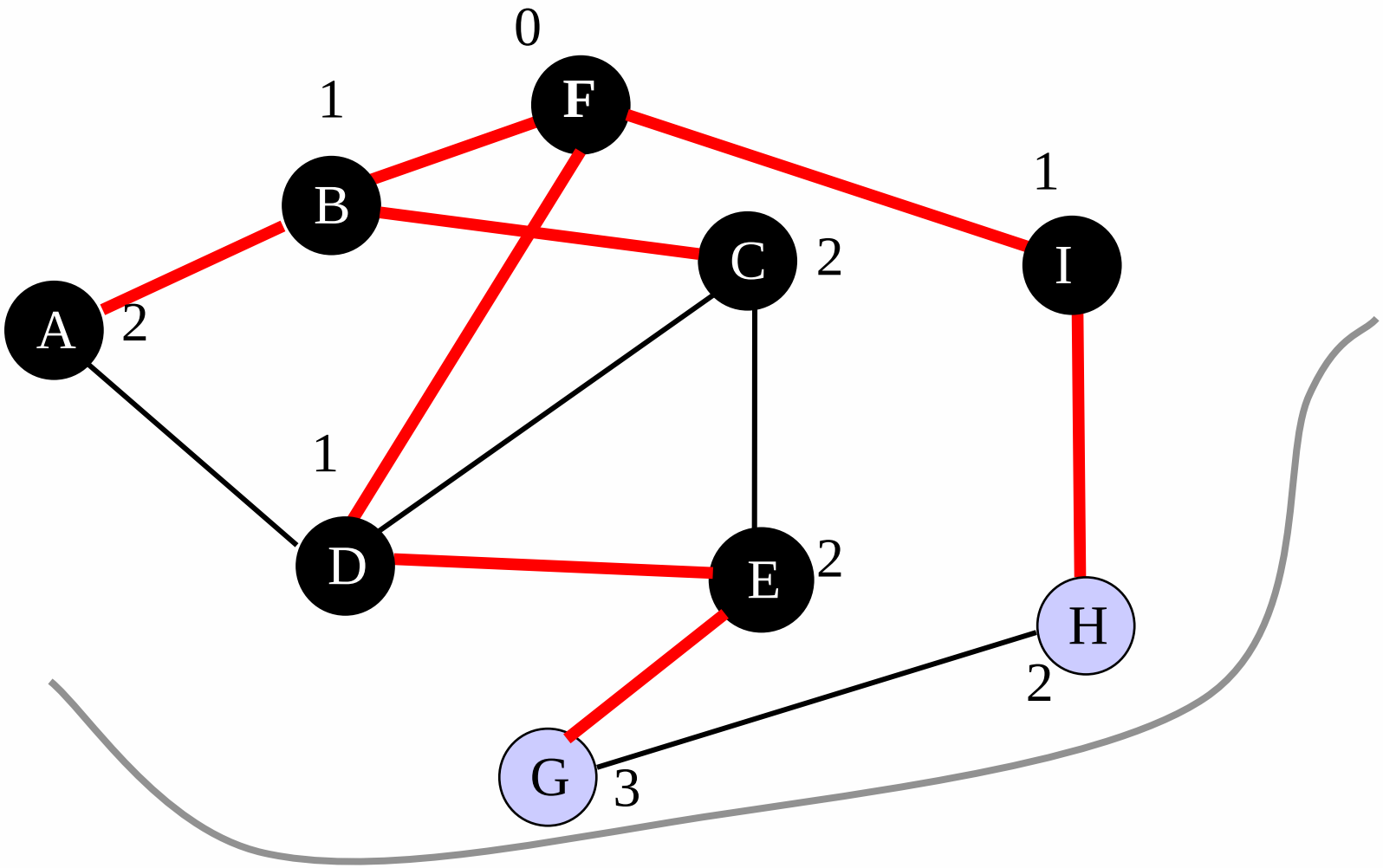
Coda: {A, E, H}

Esempio



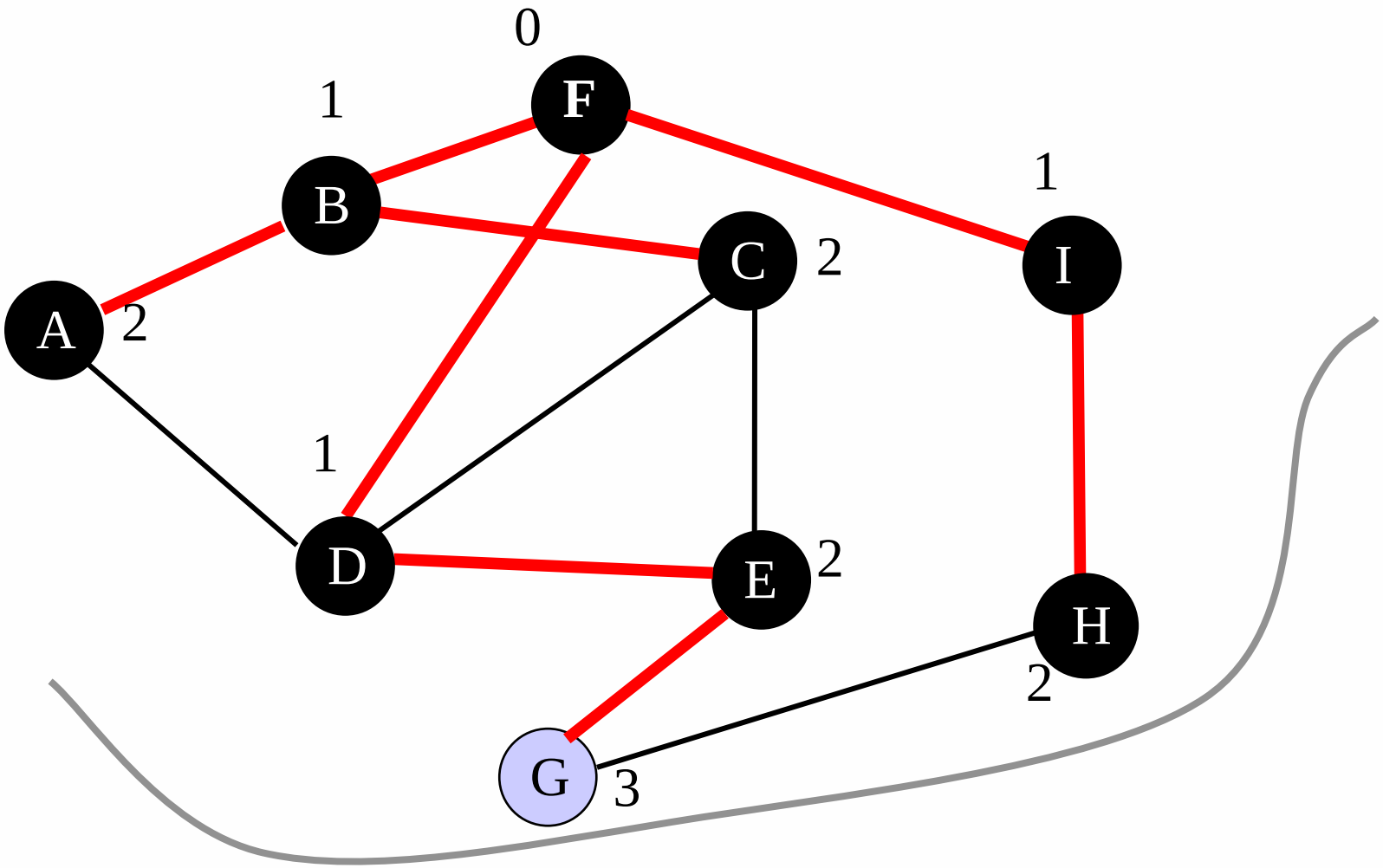
Coda: {E, H}

Esempio



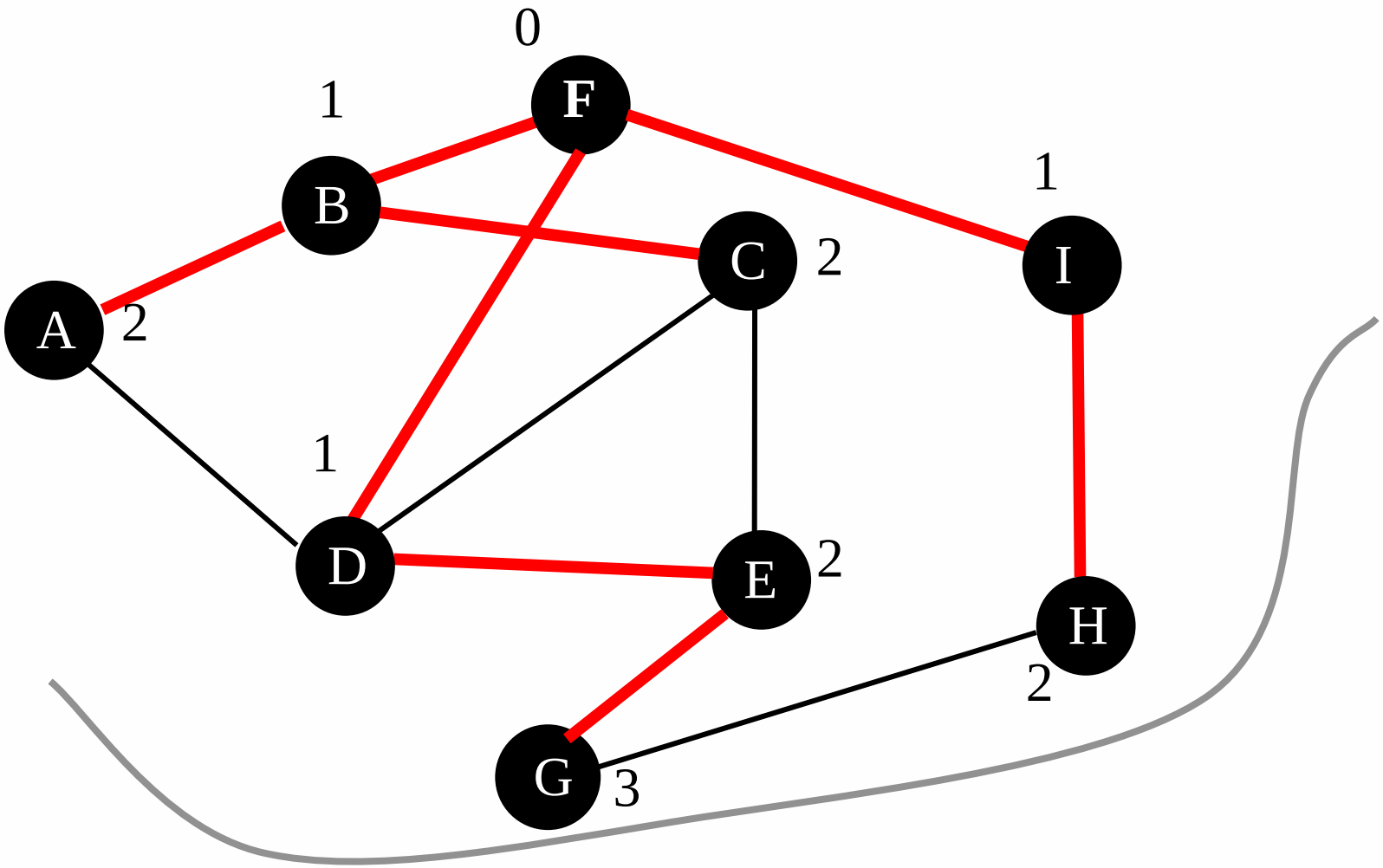
Coda: {H, G}

Esempio



Coda: {G}

Esempio



Coda : { }

Visita in profondità (depth first search, DFS)

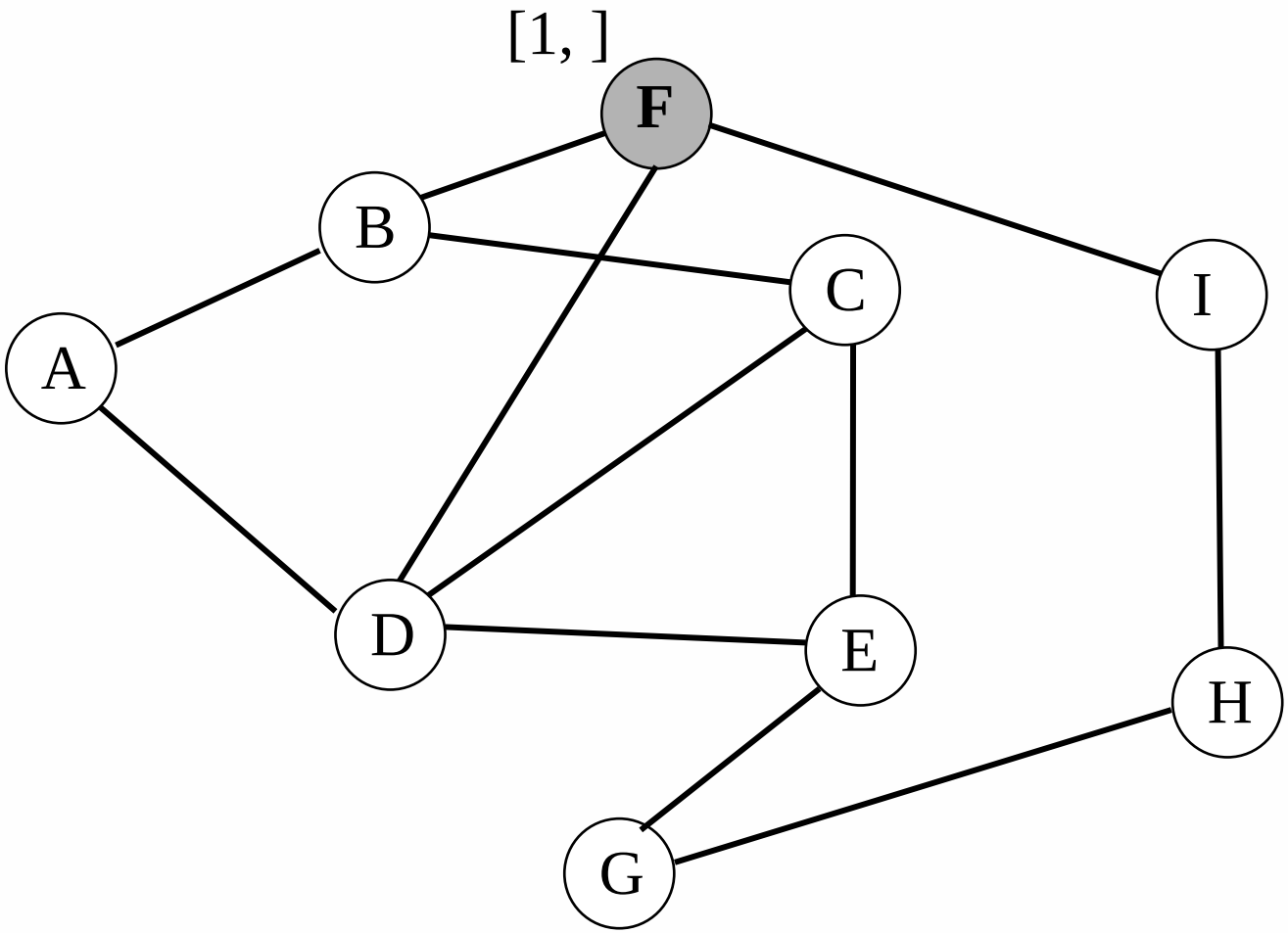
- Come funziona?
  - Visita i nodi andando il "più lontano possibile" nel grafo: prima di concludere la visita di un vertice, viene conclusa la visita di tutti i suoi successori
- Output:
  - Albero DF (depth-first) contenente tutti i vertici raggiungibili da s seguendo il perorso effettuato dalla visita depth-first
  - Istante di tempo in cui ogni vertice viene raggiunto e in cui la visita termina

DFS: algoritmo di visita

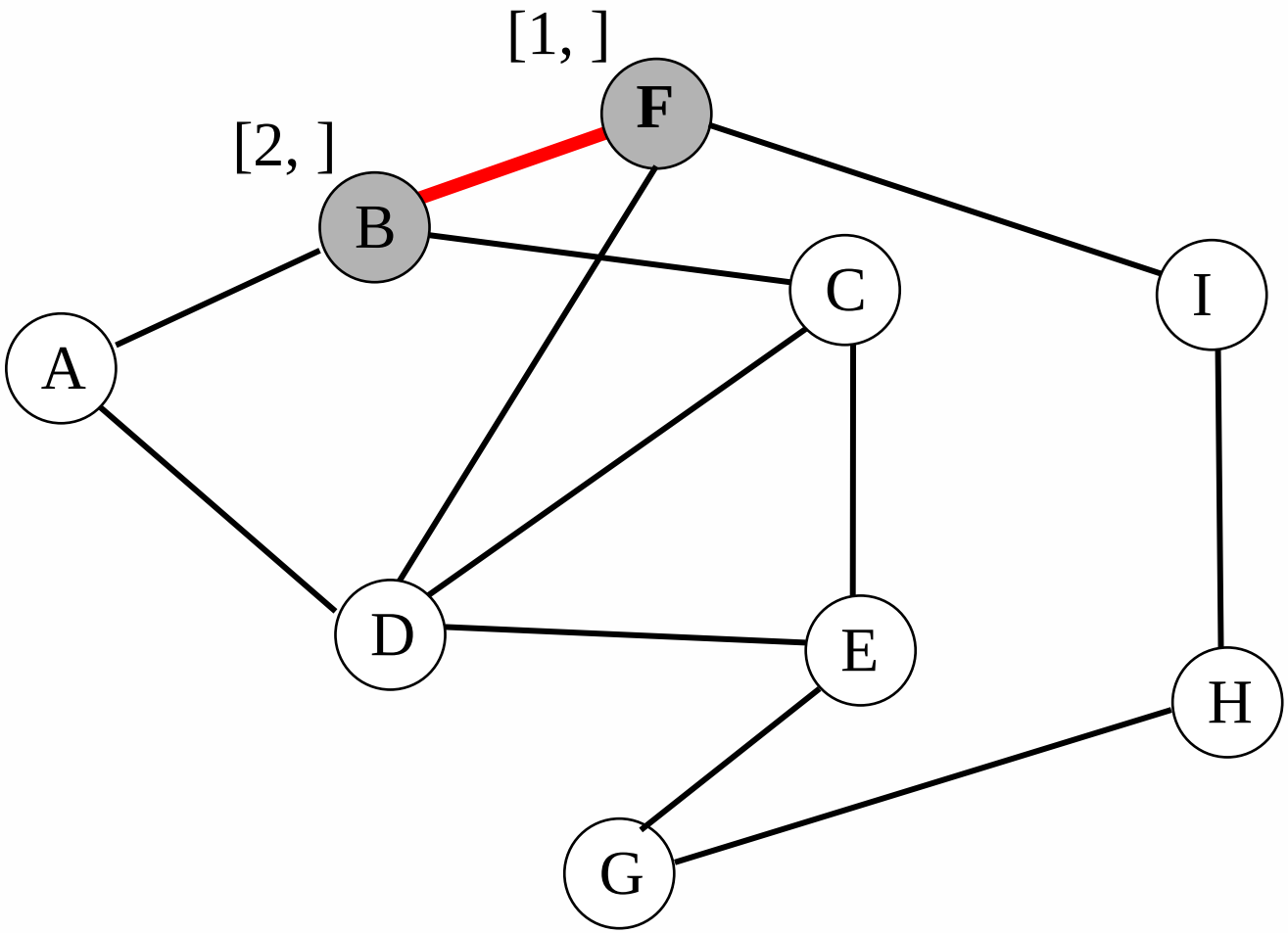

```
DFS(G,s)
  mark[s] = gray
  time = time+1
  d[s] = time
  for each v in adj[s] do
    if mark[v] == white
    then
      π[v]= s
      DFS(G,v)
  "visita il vertice s"
  time = time+1
  f[s] = time
  mark[s] = black
```

- *mark[s]* è la marcatura del nodo *s* come nel BFS
- *d[s] e f[s]* sono rispettivamente l'istante in cui s viene raggiunto e in cui la sua visita termina
- *π[s]* è il predecessore di *s* nell'albero di copertura
- Costo:
  - O(|V|+|E|) liste
  - O($|V|^2$) matrice

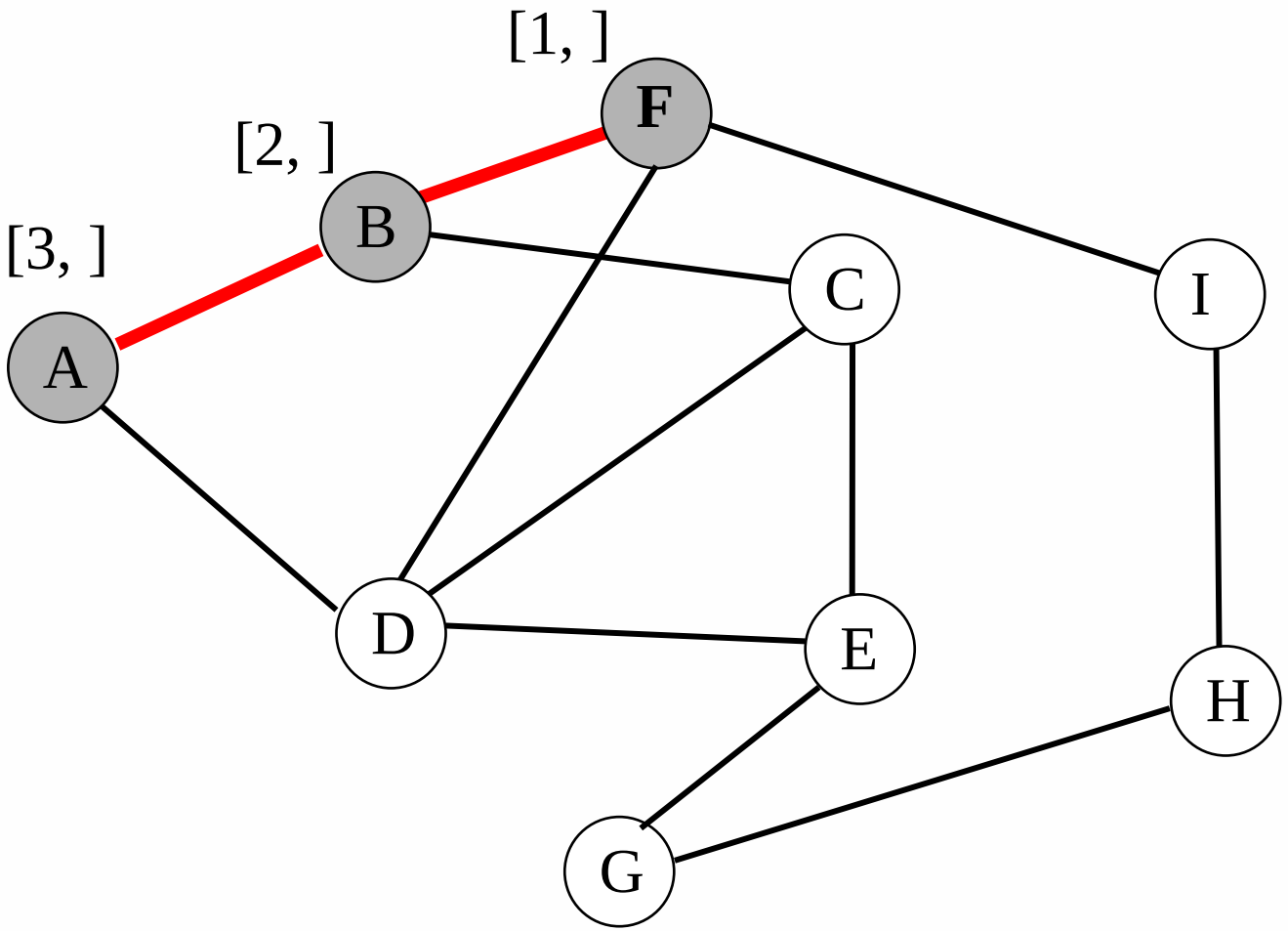
Esempio



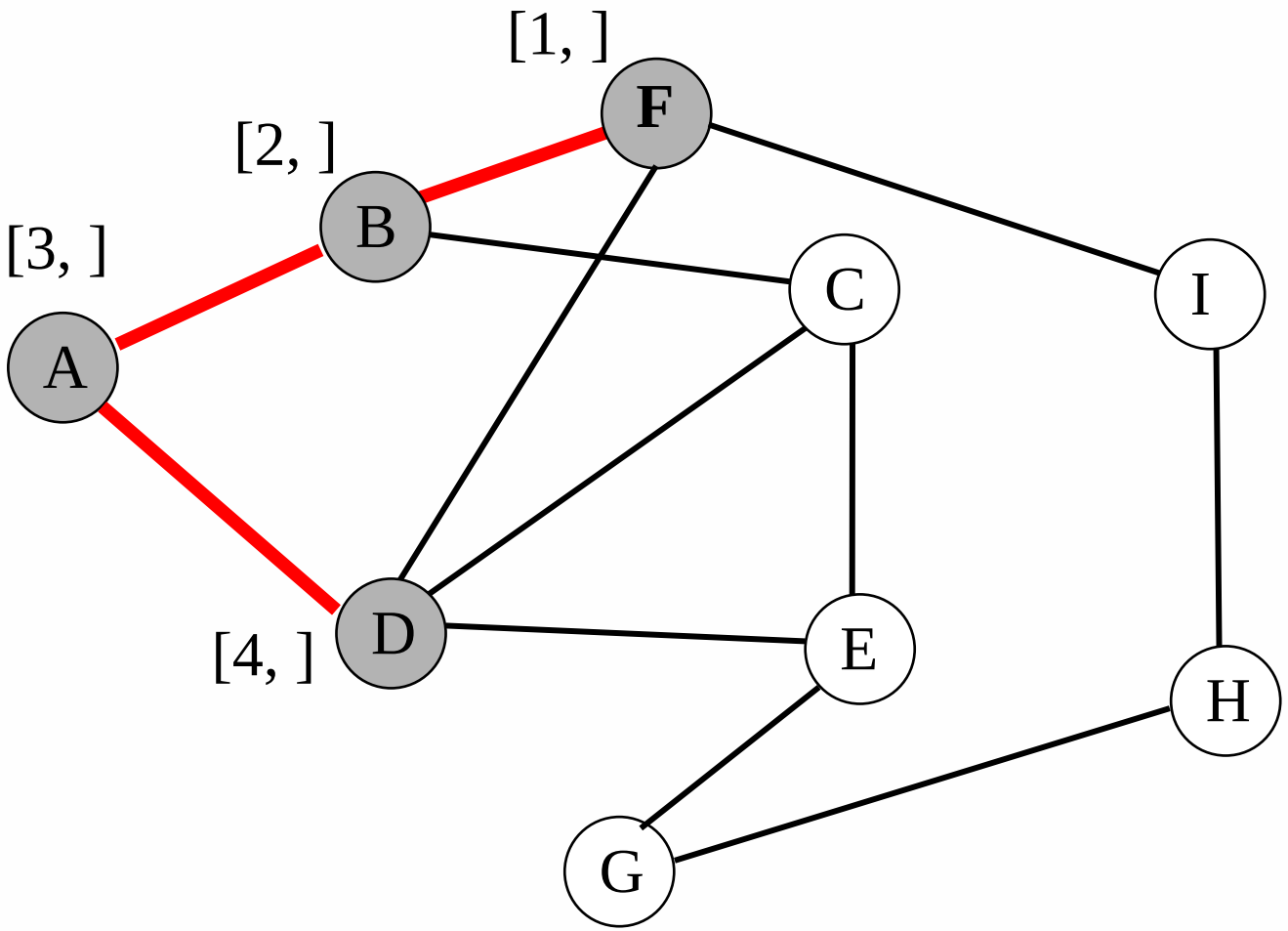
Esempio



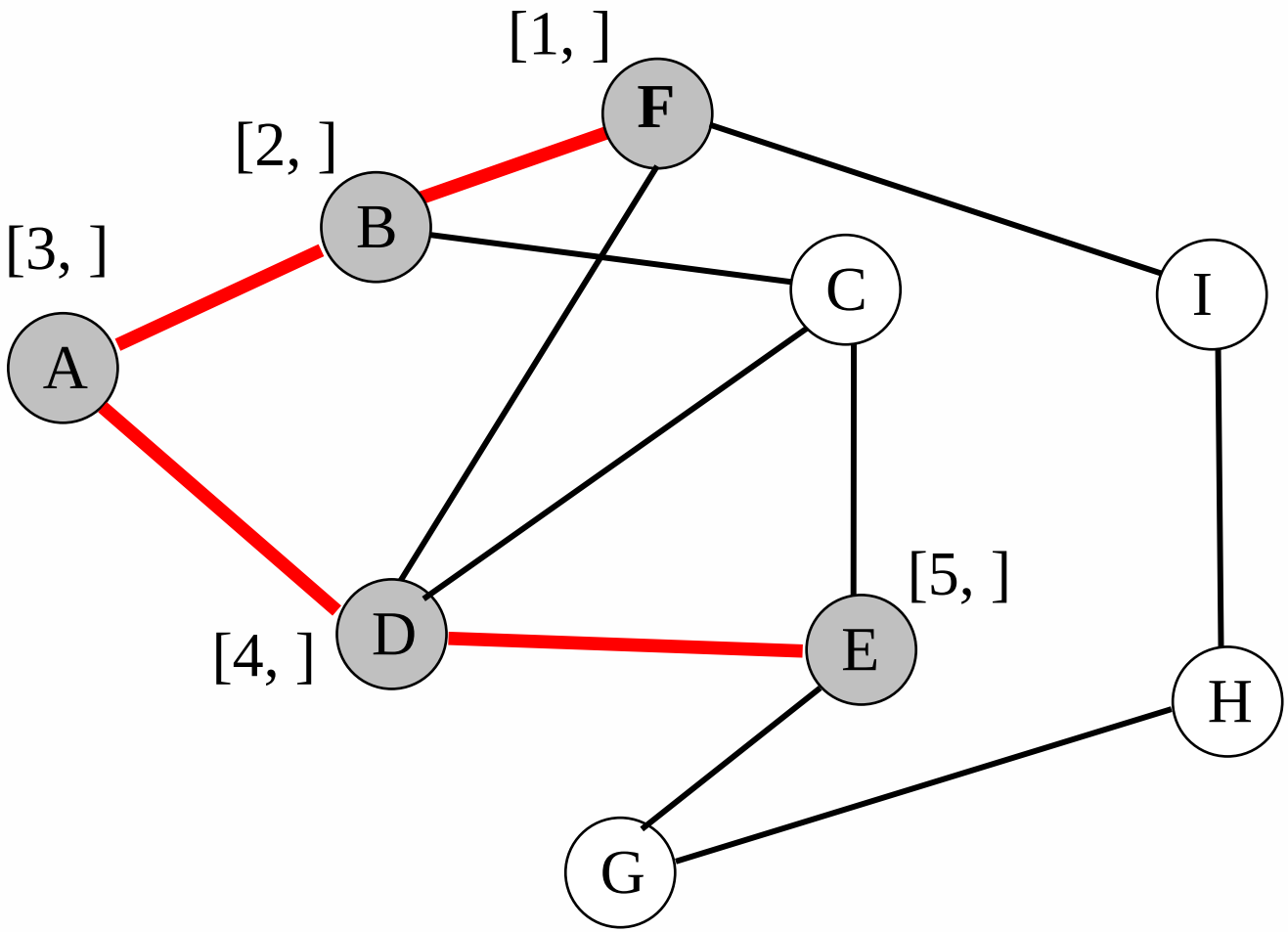
Esempio



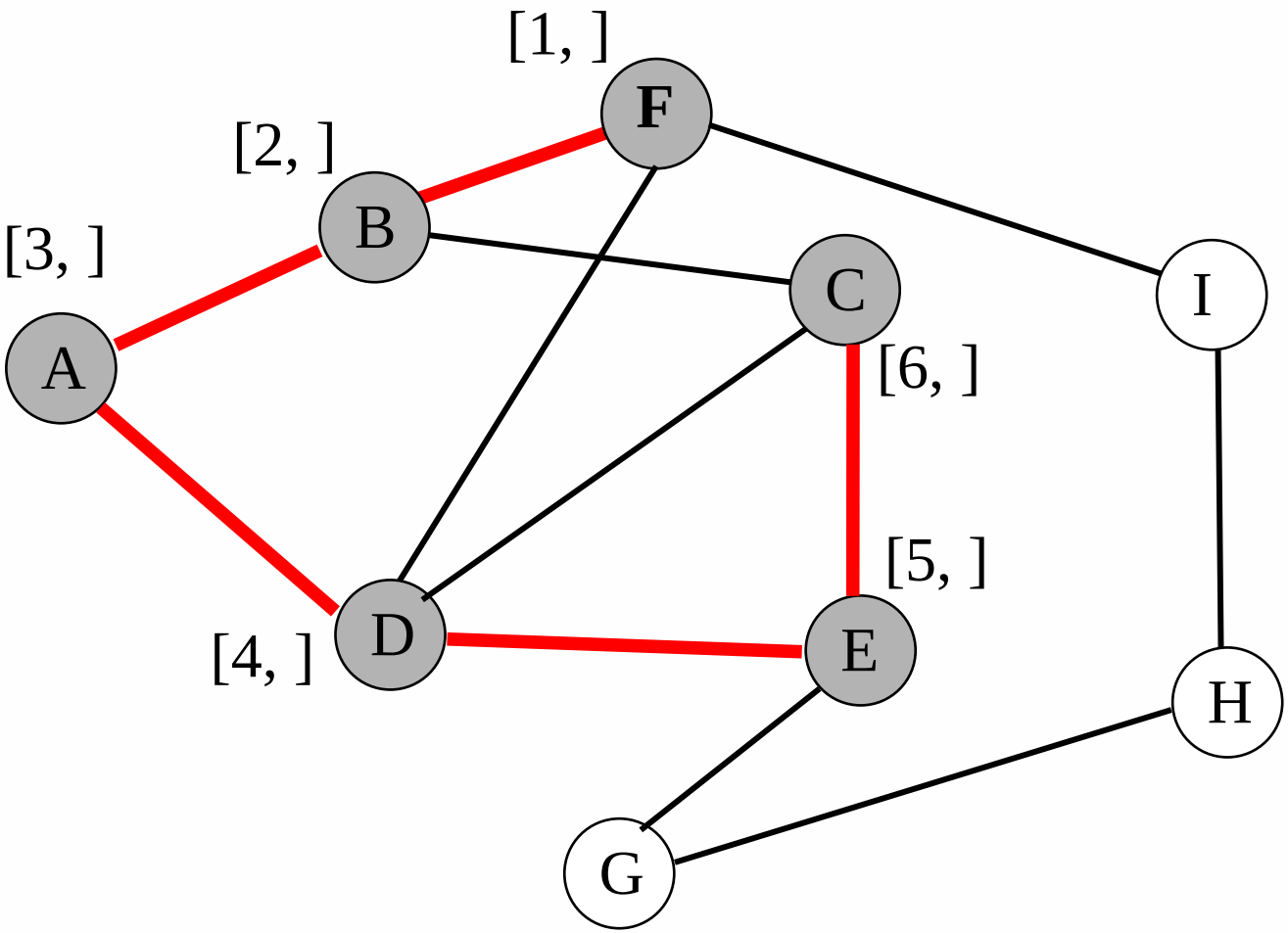
Esempio



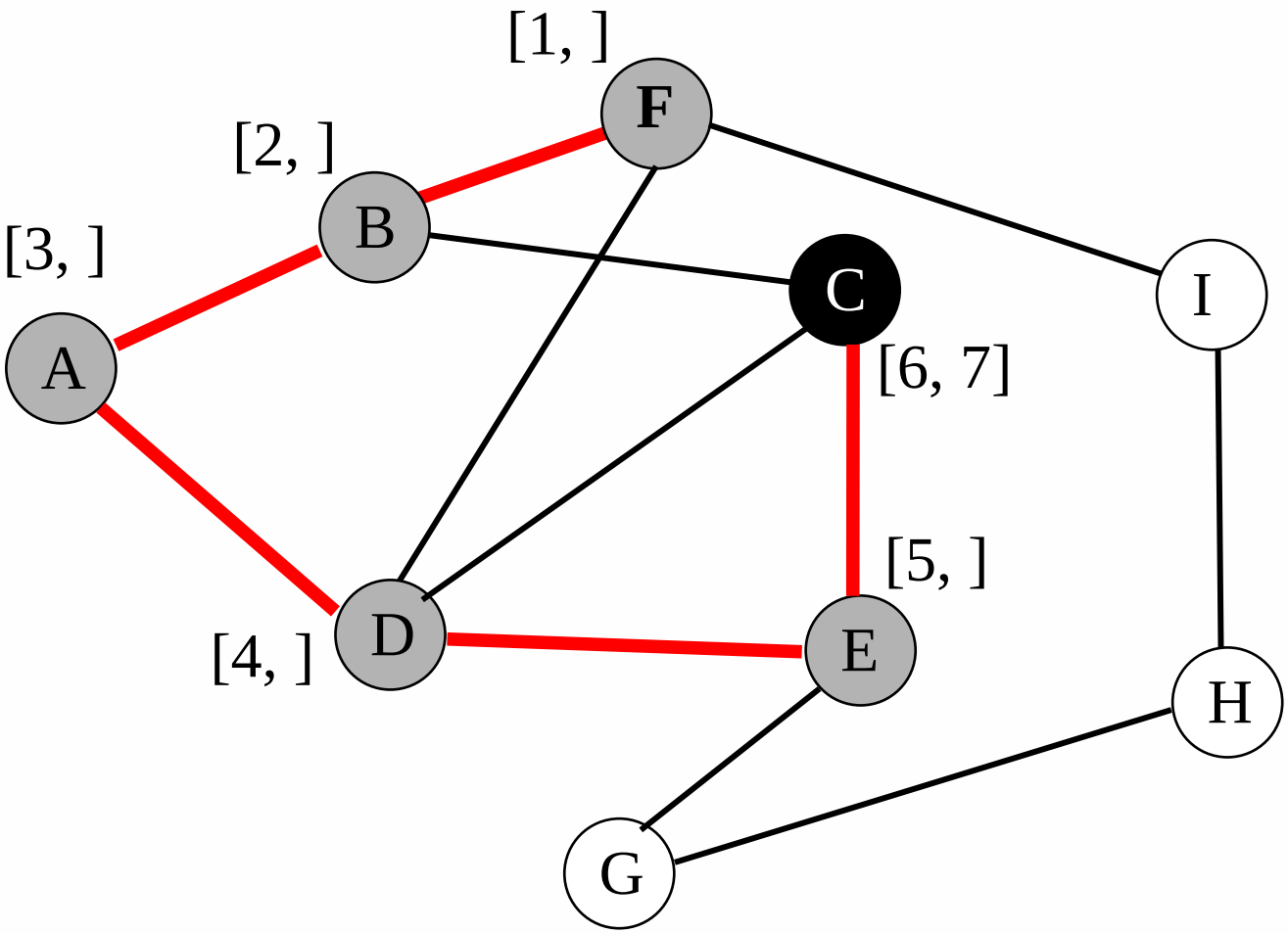
Esempio



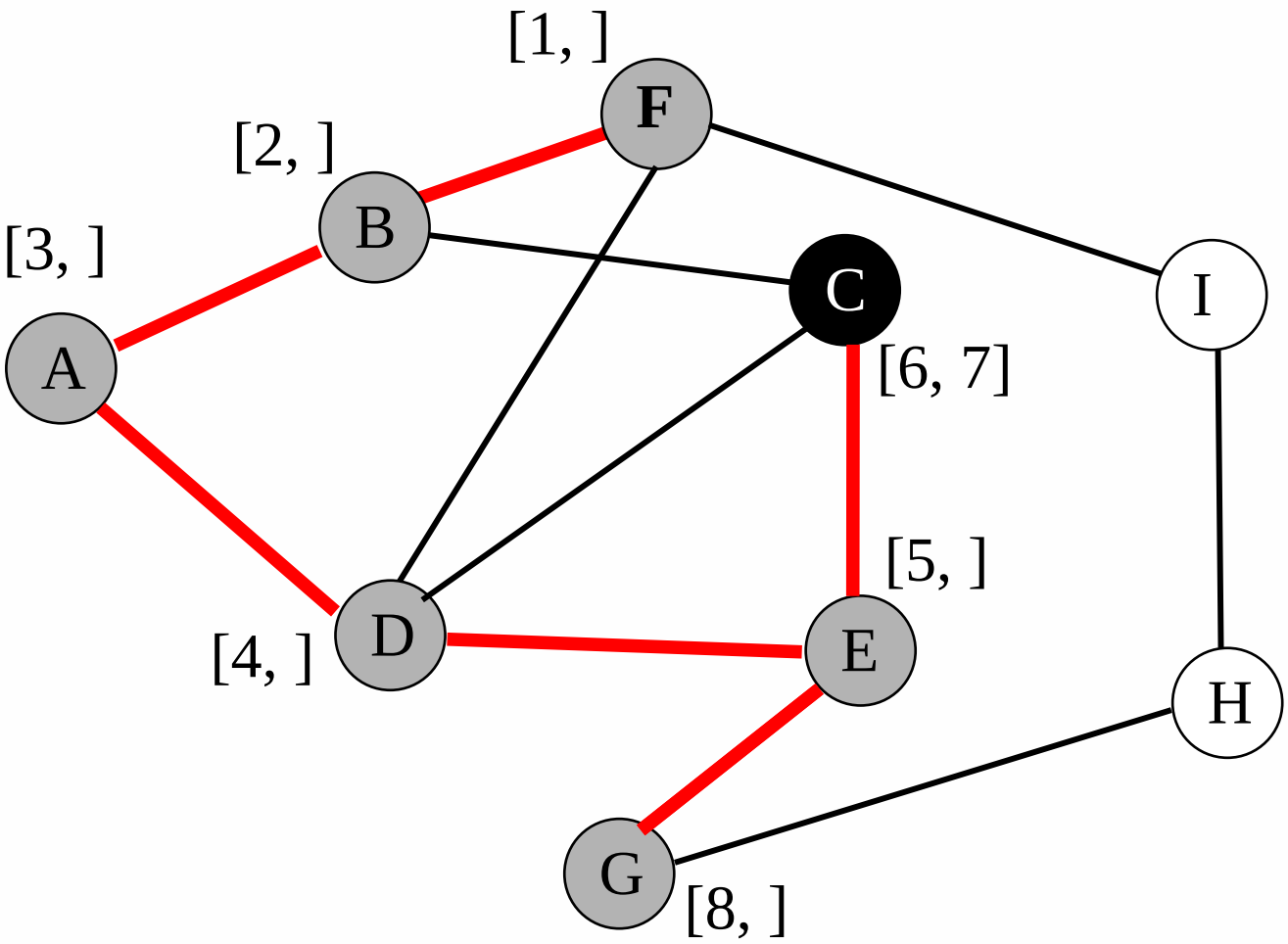
Esempio



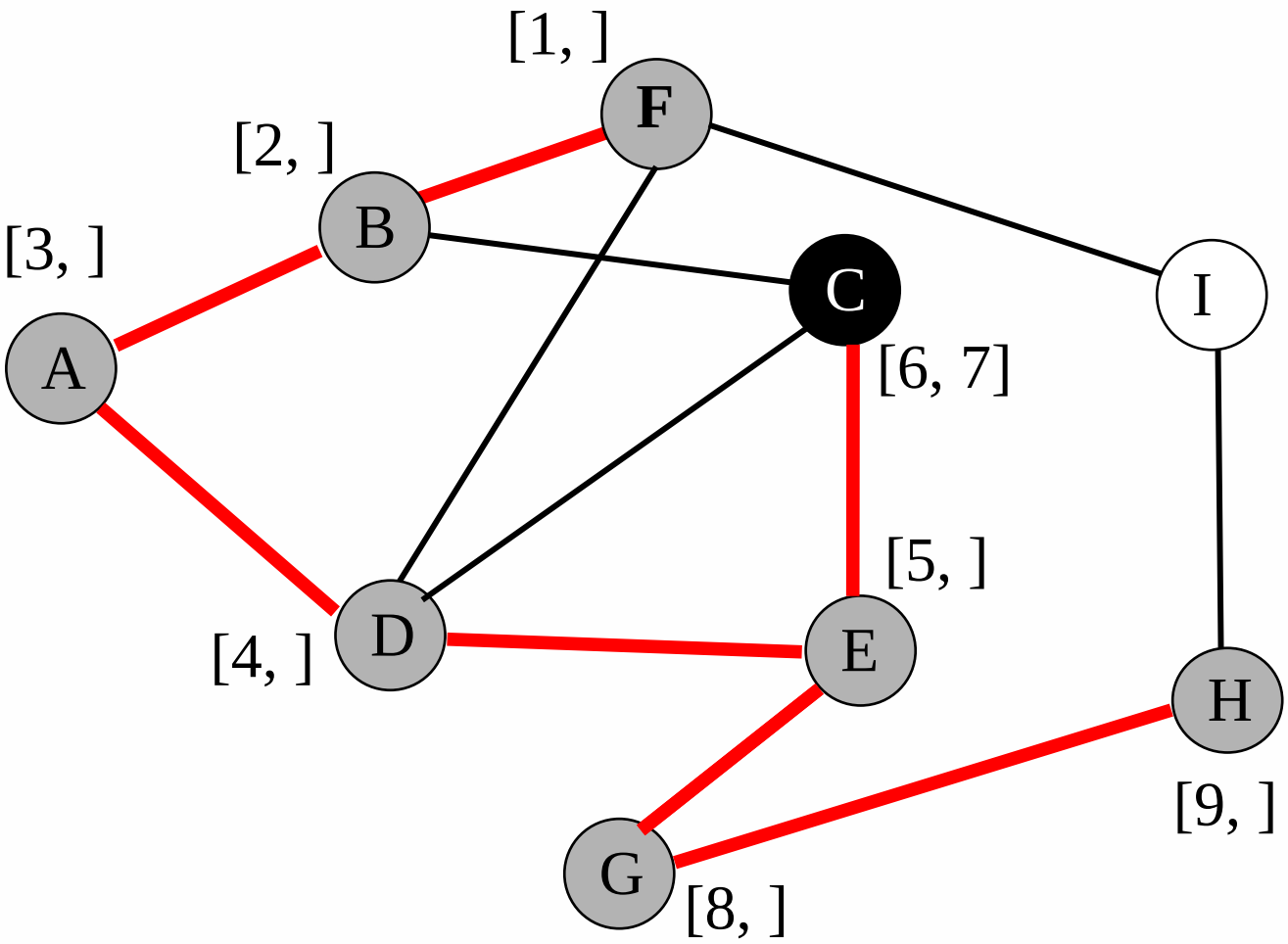
Esempio



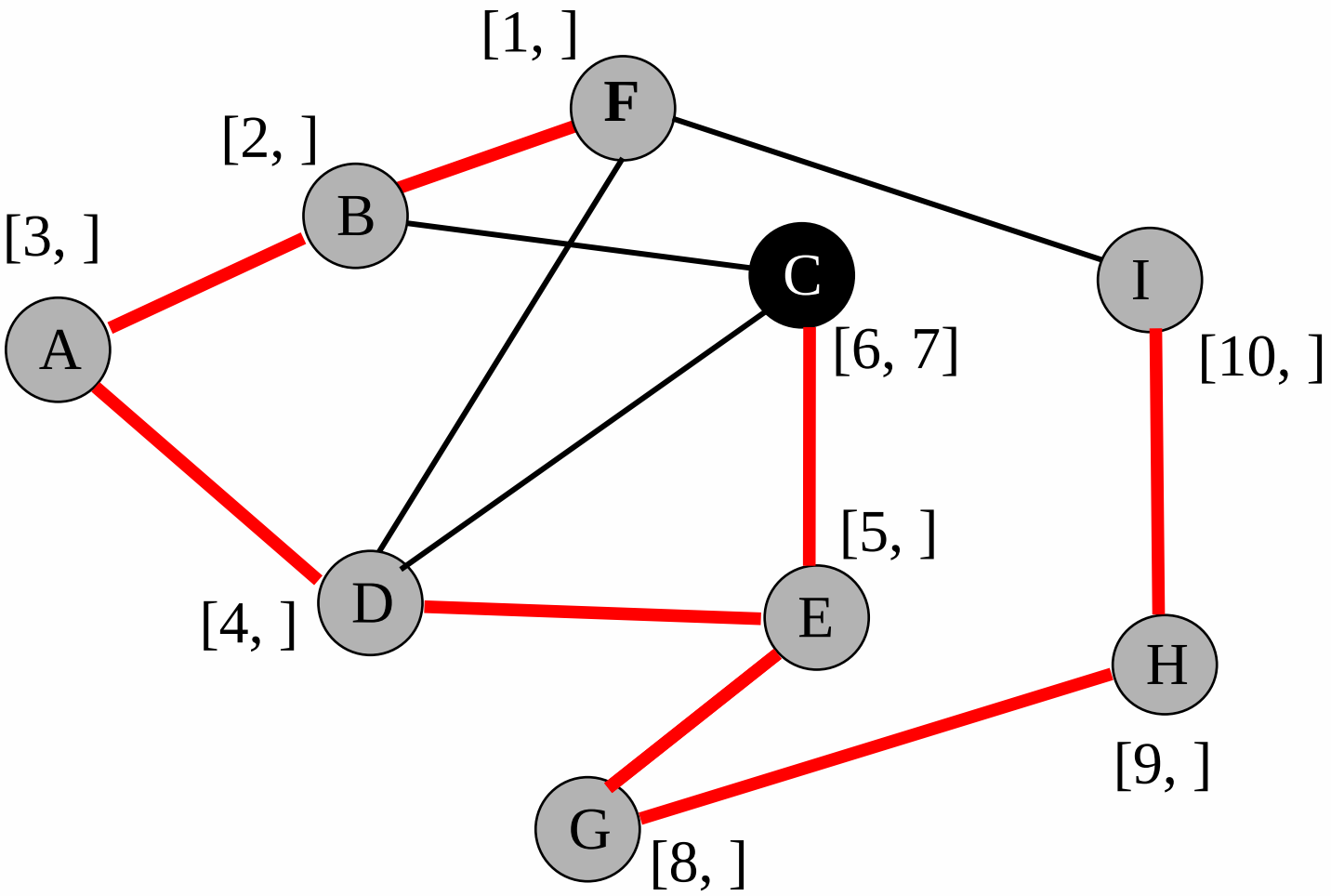
Esempio



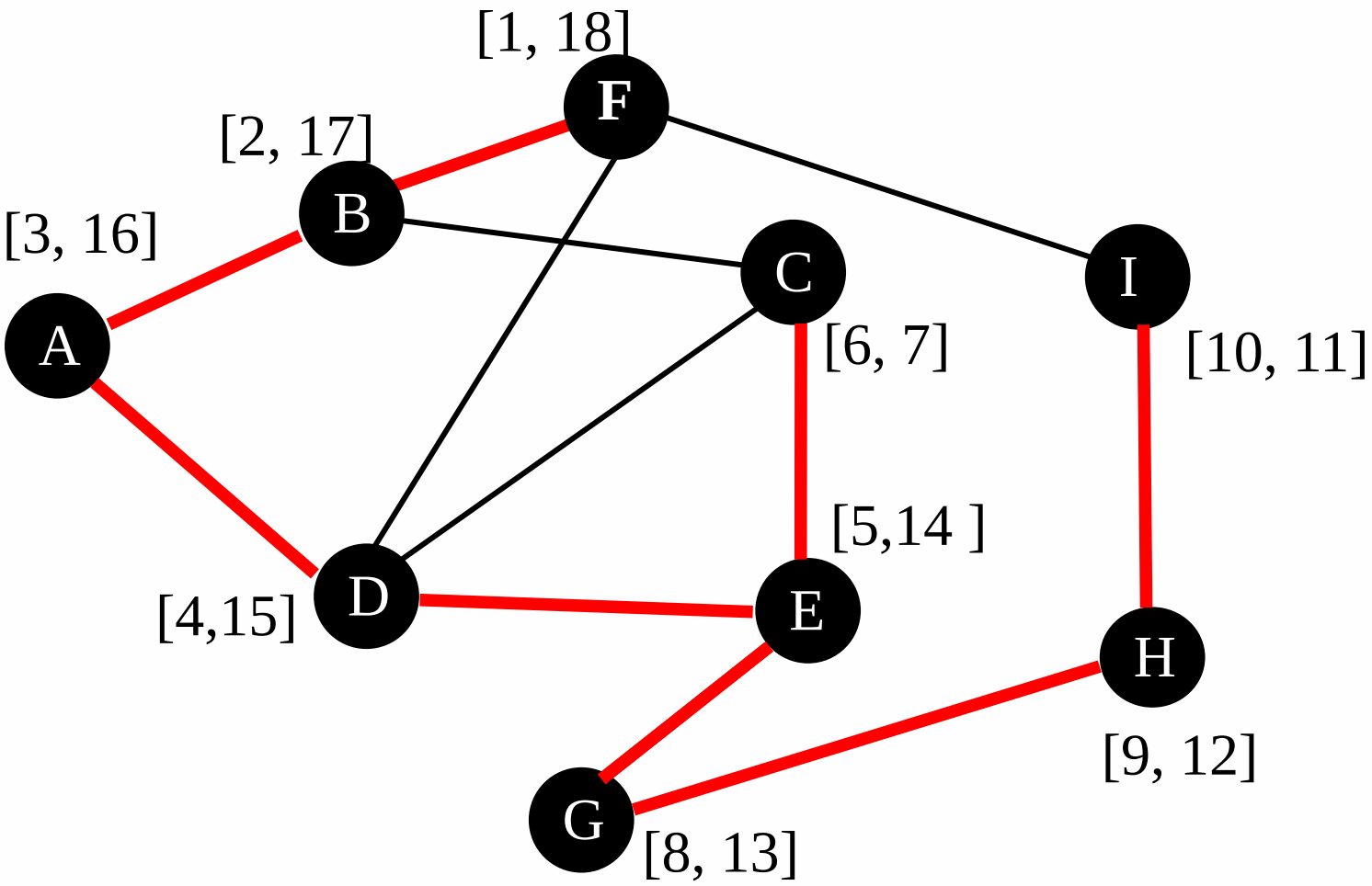
Esempio



Esempio



Esempio



Proprietà DFS

- In qualsiasi visita di profondità di un grafo G=(V,E), per ogni coppia di vertici u,v, una sola delle seguenti condizioni è vera:
  - Gli intervalli *[d[u], f[u]]* e *[d[v], f[v]]* sono disgiunti
    $\Rightarrow$ *u,v* non sono discendenti l'uno dell'altro nell'albero DF
  - L'intervallo *[d[u], f[u]]* è interamente contenuto in *[d[v], f[v]]*
    $\Rightarrow$ *u* è discendente di *v* in un albero DF
  - L'intervallo *[d[v], f[v]]* è interamente contenuto in *[d[u], f[u]]*
    $\Rightarrow$ *v* è discendente di *u* in un albero DF
- In un albero DF di un grafo *G=(V,E),* il vertice *v* è un discendente del vertice *u* $\Leftrightarrow$ al tempo *d[u]*, il vertice *v* può essere raggiunto da *u* lungo un cammino che è formato da soli nodi bianchi

Applicazioni

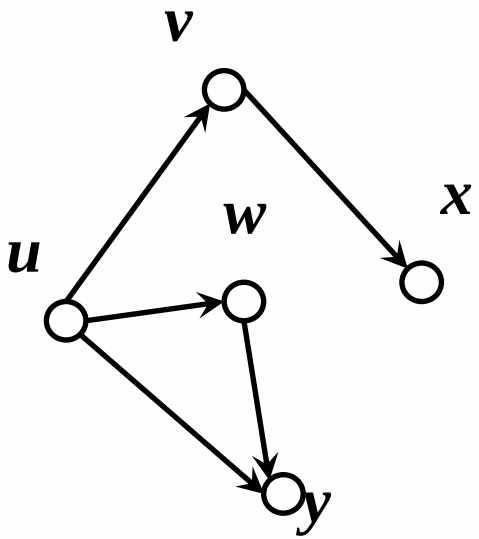
Cammino minimo fra due nodi

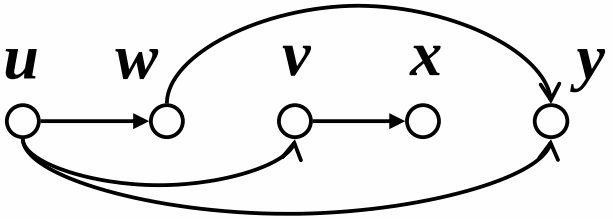
- La visita BFS può essere utilizzata per ottenere il percorso più breve fra due vertici (numero di archi)

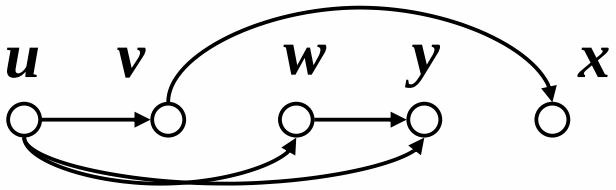
```
print-path(G, s, v)
  if v = s then
    print s
  else if π(v)= nil then
    print "no path from s to v"
  else
    print-path(G,s, π(v))
    print v
```

Ordinamento topologico

- Dato un DAG *G* (direct acyclic graph), un *ordinamento topologico* su *G* è un ordinamento lineare dei suoi vertici tale per cui:
  - se *G* contiene l'arco *(u,v)*, allora *u* compare prima di *v* nell'ordinamento
  - Per transitività, ne consegue che se *v* è raggiungibile da *u*, allora *u* compare prima di *v* nell'ordinamento
  - Nota: possono esserci più ordinamenti topologici

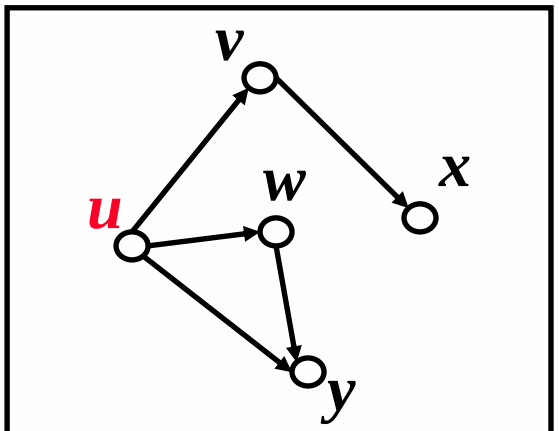




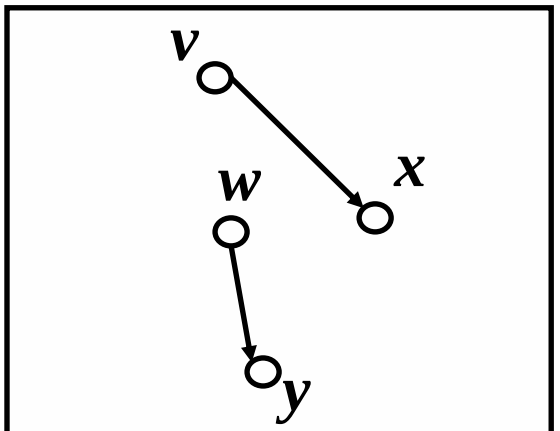


Ordinamento topologico (2)

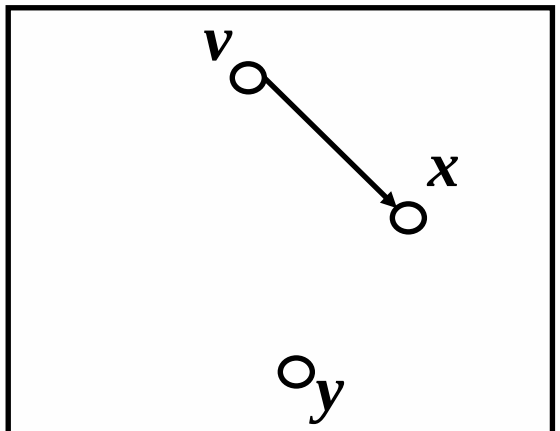
- Problema:
  - Fornire un algoritmo che dato un grafo orientato aciclico, ritorni un ordinamento topologico
- Soluzione diretta
  - Trovare ogni vertice che non ha alcun arco incidente in ingresso
  - Stampare questo vertice e rimuoverlo, insieme ai suoi archi
  - Ripetere la procedura finché tutti vertici risultano rimossi.



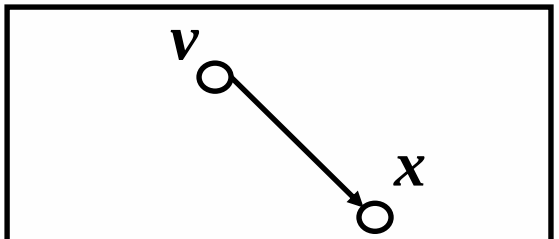
output:



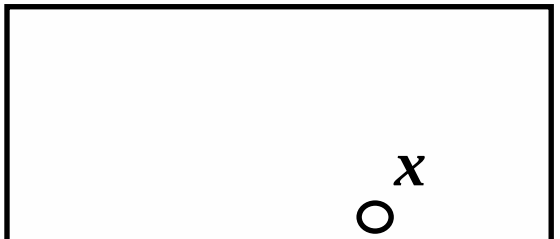
output: *u*



output: *u w*



output: *u w y*



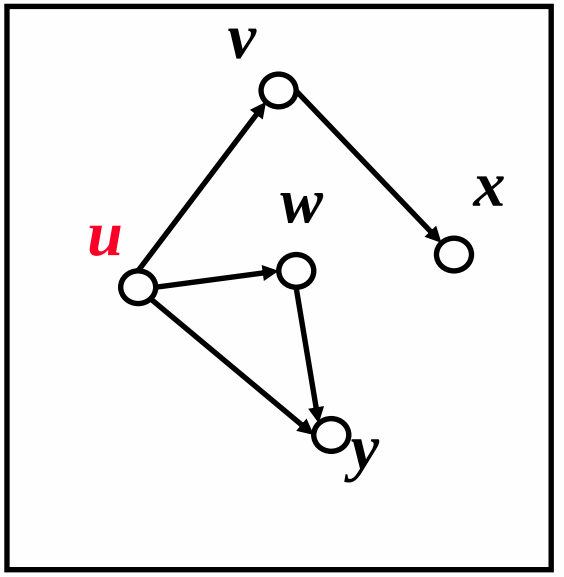
output: *u w y v*

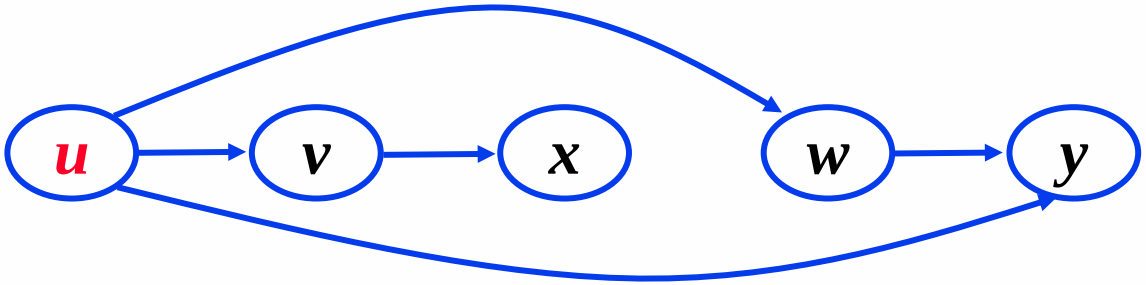
output: *u w y v x*

Ordinamento topologico (2)

- Problema:
  - Fornire un algoritmo che dato un grafo orientato aciclico, ritorni un ordinamento topologico
- Soluzione diretta
  - Trovare ogni vertice che non ha alcun arco incidente in ingresso
  - Stampare questo vertice e rimuoverlo, insieme ai suoi archi
  - Ripetere la procedura finché tutti vertici risultano rimossi.
- Basato su DFS

```
topological-sort(G)
for each v in V[G] do
   if mark[v] == white
   then DFS(G,v)
Nella DFS() l'operazione di visita
consiste nell'aggiungere il vertice
alla testa di una lista l
return l
```





output: *u v x w y*